

แคลคูลัส 2

CALCULUS II

ชัยรัตน์ มदनาค



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

Naresuan University Publishing House

www.nupress.grad.nu.ac.th



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร Naresuan University Publishing House

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร 99 หมู่ 9 อาคารมหาธรรมราชา ชั้น 1 มหาวิทยาลัยนเรศวร
ตำบลท่าโพธิ์ อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836 E-mail : nuph@nu.ac.th

www.nupress.grad.nu.ac.th สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร @nupress

สงวนลิขสิทธิ์ ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร ห้ามทำซ้ำ ดัดแปลง เผยแพร่ต่อสาธารณชนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ ไม่ว่าในรูปแบบใด ๆ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร เท่านั้น

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

ชัยรัตน์ มदनาค.

แคลคูลัส 2 = Calculus II.- พิษณุโลก : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2567.

432 หน้า.

1. แคลคูลัส I. ชื่อเรื่อง.

515

ISBN 978-616-426-358-1

ISBN (e-book) 978-616-426-359-8

สพน. 138

ราคา 350 บาท

พิมพ์ครั้งแรก ตุลาคม พ.ศ. 2567

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

วางจำหน่ายที่

1. ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทร. 0 2218 9812
2. ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0 2579 0113
3. ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0 2613 3899
4. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารมหาธรรมราชา จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836

ประธานกองบรรณาธิการ รองศาสตราจารย์ ดร.กรรณกาญจน์ ชูทิพย์ คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร

กองบรรณาธิการ รองศาสตราจารย์ ดร.สุชาติ แย้มเม่น • รองศาสตราจารย์สุทัศน์ เขียมวัฒนา • รองศาสตราจารย์ ดร.ศักดิ์ดา สมกุล •
รองศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี • ศาสตราจารย์ ดร. พญ.สุรชาติพงษ์เจริญ •
ศาสตราจารย์ ดร. ภญ.กรรณก อังคินันท์ • รองศาสตราจารย์ ดร.นิทรา กิจธิระวุฒิมังษ์ • ศาสตราจารย์ ดร.สุทธา ถาน้อย •
รองศาสตราจารย์ ดร.กิตติมา ขาววิชัย • รองศาสตราจารย์ ดร.รุจโรจน์ แก้วอุไร • รองศาสตราจารย์ นาวาโท ดร.วัฒนชัย หมั่นยัง •
รองศาสตราจารย์ ดร.วัชรพล พุทธิรักษา • รองศาสตราจารย์ ดร.พงศ์พันธ์ กิจสนาโยธิน • ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยุวรงค์ จันทร์วิจิตร •
ผู้ช่วยศาสตราจารย์รยารักษ์ สุวพันธ์ • พัชร ท้วมใจดี • นวพรรณ ดันดีพลผล • สรญา แสงเย็นพันธ์

ประสานงาน ภักศิณี เทิดสิทธิกุล

ฝ่ายขาย/การเงิน มลชา โพธิ์เงิน • วสันต์ มาสวัสดิ์

ออกแบบปก สัญญา จันทา

ออกแบบรูปเล่ม สรญา แสงเย็นพันธ์

พิมพ์ที่ รันสุวรรณการพิมพ์ 3 30-31 ถนนพญาสีโท ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก



สำนักพิมพ์นี้เป็นสมาชิกสมาคมผู้จัดพิมพ์
และผู้จำหน่ายหนังสือแห่งประเทศไทย
<https://pubat.or.th>

ลิขสิทธิ์
Double A
กระดาษคุณภาพ เพื่อผลงานคุณภาพ



@nupress

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่ฝ่ายจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

Line : @nupress Email : nuph@nu.ac.th

คำนำ

หนังสือแคลคูลัส 2 เป็นหนังสือเล่มที่ 2 ของเนื้อหาทั้งหมดของรายวิชาแคลคูลัสที่ประกอบไปด้วยเรื่อง ลำดับ อนุกรม การทดสอบอนุกรม อนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์ เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ ค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น หลักเกณฑ์ของคราเมอร์ ปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิย่อย ฐานและมิติ การแปลงเชิงเส้น ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ เนื้อหาหลายส่วนมีความสำคัญในการประยุกต์ต่อยอดกับหลายศาสตร์ เช่น วิศวกรรมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ สำหรับเนื้อหาในส่วนของฟังก์ชันมากกว่าสองตัวแปร สำหรับการหาปริมาตร ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์และปริพันธ์ จะอยู่ในหนังสือแคลคูลัส 3 จุดประสงค์ของหนังสือเล่มนี้ก็คือ เพื่อให้ผู้อ่านได้ความรู้ในหลักการทางพีชคณิตเชิงเส้นพร้อมไปด้วย อันจะเป็นประโยชน์ในการต่อยอดในงานที่เกี่ยวข้องได้

สารบัญ

1	ลำดับและอนุกรม 1 (Sequence and Series)
	ลำดับ (Sequence)..... 2
	อนุกรม (Series)..... 52
	การทดสอบการลู่เข้า (Tests of convergence) 70
	อนุกรมสลับ (Alternating series)..... 98
	อนุกรมกำลัง (Power series)..... 110
	อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน (Taylor and Maclaurin series)..... 119
	พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor polynomials) 127
	การประยุกต์ใช้ออนุกรมเทย์เลอร์ (Applications of Taylor series) 138
	บทสรุป..... 151
	แบบฝึกหัด..... 151
2	ระบบสมการเชิงเส้นและการดำเนินการของเมทริกซ์ 161 (Systems of Linear Equations and Matrices)
	เมทริกซ์ (Matrix) 162
	ผลคูณจุดและการคูณเมทริกซ์ (Dot product and matrix multiplication) 169
	ระบบสมการเชิงเส้น (System of linear equations)..... 180
	การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (Elementary row operations)..... 194
	การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการเมทริกซ์ (Solving a system of linear equations using matrix operations)..... 202
	อินเวอร์สของเมทริกซ์ (Inverse of a matrix) 217
	ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant) 226
	การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ (Solving system of linear equations using) 249

กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule)	253
บทสรุป	259
แบบฝึกหัด	260

3 | ปริภูมิเวกเตอร์..... 271

(Vector Space)

เวกเตอร์ในปริภูมิยูคลิด (Euclidean space)	272
ปริภูมิเวกเตอร์บนเซตของจำนวนจริง (Real vector space)	288
ปริภูมิย่อย (Subspace)	296
ผลรวมเชิงเส้น (Linear combination)	303
ฐานและมิติ (Basis and dimension)	311
ปริภูมิแถวและปริภูมิหลัก (Row and column spaces)	333
ปริภูมิศูนย์ (Null space)	349
การแปลงเชิงเส้น (Linear transformation)	362
เมทริกซ์มาตรฐาน (Standard matrix)	371
ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues) และ ปริภูมิลักษณะเฉพาะ (Eigenvectors)	383
บทสรุป	402
แบบฝึกหัด	403

บรรณานุกรม..... 409

เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 1	411
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 2	412
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 3	418

ดัชนี 422

01

ลำดับและอนุกรม Sequence and Series

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงบทนิยามของลำดับและอนุกรม การทดสอบการลู่เข้า
ของลำดับและอนุกรม และการประยุกต์

1.1 ลำดับ (Sequence)

ลำดับ แสดงถึง การเรียงลำดับของสิ่งต่าง ๆ เช่น ลำดับของตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5 เป็นต้น ลำดับสามารถมีความสัมพันธ์กับเวลาหรือการเกิดขึ้นตามลำดับที่กำหนดไว้ เช่น การทำงานตามลำดับของขั้นตอนในกระบวนการการผลิต หรือการดำเนินการตามลำดับในการทำอะไรบางอย่าง สังเกตจากตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่างลำดับและปริมาณของสัตว์ชนิดหนึ่งดังตารางข้อมูลต่อไปนี้

ตาราง 1.1 ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่สำรวจกับจำนวนสัตว์

พื้นที่สำรวจลำดับที่	1	2	3	4	5	6
จำนวนสัตว์	10	22	46	94	190	382

จากตารางจะเห็นว่า อาจใช้ข้อมูลที่มีสร้างฟังก์ชันของความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่สำรวจกับจำนวนของสัตว์ได้ โดยที่เซตของพื้นที่สำรวจ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เรียกว่าโดเมน (domain) และเซตของจำนวนสัตว์ $\{10, 22, 46, 94, 190, 382\}$ เรียกว่าเรนจ์ (range)

พิจารณาลำดับ

$$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right\}$$

ซึ่งคือลำดับของค่าของฟังก์ชัน $f(n) = \frac{1}{3^n}$ สำหรับ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ดังนั้น ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยของจำนวนเต็ม ลำดับถูกแบ่งเป็น 2 ประเภท กล่าวคือ ลำดับที่มีโดเมนจำกัด เช่น $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ เรียกว่า ลำดับจำกัด และลำดับที่มีโดเมนไม่จำกัด เช่น $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ เรียกว่า ลำดับอนันต์

เมื่อเขียนแทนลำดับด้วยฟังก์ชัน $f(n)$ เช่น $f(n) = \frac{1}{3^n}$ พจน์ที่ n ของลำดับจะเขียนแทนด้วย $a_n = f(n)$ และถ้าเป็นลำดับจำกัด จะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, \dots, a_n$ สำหรับ

ลำดับไม่จำกัดจะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ โดยที่ a_1 เรียกว่าพจน์ที่ 1 ของลำดับ a_2 เรียกว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ เรื่อยไป

ตัวอย่าง 1.1

กำหนดให้ $f(n) = \frac{1}{3^n}$ แทนฟังก์ชันของลำดับโดยที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวกจงหาพจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ 5 ของลำดับ

วิธีทำ จาก $f(n) = \frac{1}{3^n}$ พิจารณาแทน $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ได้

$$\text{พจน์ที่ 1 ของลำดับคือ } a_1 = f(1) = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{พจน์ที่ 2 ของลำดับคือ } a_2 = f(2) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{พจน์ที่ 3 ของลำดับคือ } a_3 = f(3) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$\text{พจน์ที่ 4 ของลำดับคือ } a_4 = f(4) = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$\text{พจน์ที่ 5 ของลำดับคือ } a_5 = f(5) = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

ตัวอย่าง 1.2

จงคำนวณหา a_2, a_3, a_4 สำหรับลำดับที่กำหนดโดย

$$a_1 = 1, a_n = \frac{1}{3} \left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} \right)$$

วิธีทำ โดยใช้การแทนค่า ได้

$$a_2 = \frac{1}{3} \left(a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{1} \right) = \frac{4}{3}$$

สรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้นำเสนอลำดับ การตรวจสอบความลู่เข้าของลำดับ โดยลำดับจะลู่เข้าต่อเมื่อลิมิตของลำดับ a_n มีค่า หรือ ถ้าลำดับมีขอบเขตและเป็นลำดับทางเดียว ก็จะเป็นลำดับลู่เข้าเช่นกัน เนื้อหาส่วนอื่นประกอบไปด้วย การแนะนำอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต อนุกรมสลับ และ อนุกรมต่าง ๆ การตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมนั้นสามารถใช้การหาลิมิตของ a_n และประยุกต์ให้ Divergence Theorem ถ้าลิมิตมีค่าเป็นศูนย์แสดงว่าอนุกรมลู่เข้า แต่ถ้าค่าของลิมิตไม่เป็นศูนย์แสดงว่าอนุกรมลู่ออก การตรวจสอบอนุกรมโดยใช้วิธีอื่น ๆ เช่น การหาค่าปริพันธ์ของ a_n การเปรียบเทียบกับอนุกรมที่ทราบว่าจะลู่เข้าหรือลู่ออก การใช้ลิมิตและการเปรียบเทียบ การใช้อัตราส่วน หรือการใช้ค่าราก ท้ายสุด การหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง และการสร้างอนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอรินสำหรับการประมาณค่าของฟังก์ชัน



แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

a) $\left\{ \frac{1-2n}{1+2n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{ \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3} \right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{ \frac{n^2-2n+1}{n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

d) $\left\{ \left(\frac{n+1}{2n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$

e) $\left\{ \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$

02

ระบบสมการเชิงเส้นและ
การดำเนินการของเมทริกซ์

Systems of Linear Equations
and Matrices

เนื้อหาในบทนี้จะแนะนำบทนิยามของเมทริกซ์ และสมบัติต่าง ๆ ของเมทริกซ์
การเขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ และการแก้ปัญหาระบบสมการ
เชิงเส้นโดยใช้กระบวนการทางเมทริกซ์

2.1 เมทริกซ์ (Matrix)

ในคณิตศาสตร์ เมทริกซ์ คืออาร์เรย์ที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าของตัวเลข สัญลักษณ์ หรือสูตรที่เรียงลำดับในแนวแถวและคอลัมน์ เมทริกซ์เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้ คณิตศาสตร์เชิงเส้นและการประยุกต์ใช้ในหลายสาขา รวมถึงฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาการ คอมพิวเตอร์ และเศรษฐศาสตร์ สำหรับบทนี้จะไม่มีการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ผู้ที่สนใจสามารถ ดูได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่ม

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ คือ ชุดของตัวเลขจัดเรียงติดกันเป็นรูปสี่เหลี่ยม โดยตัวเลขแต่ละตัว เรียกว่า สมาชิก (element) ของเมทริกซ์

แถว (row - vector) ของเมทริกซ์

คือ สมาชิกแนวนอนของเมทริกซ์ และ **คอลัมน์ (column - vector) ของเมทริกซ์** คือ สมาชิกแนวตั้งของเมทริกซ์

ขนาดของเมทริกซ์

คือ จำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์ของเมทริกซ์ ถ้าเมทริกซ์มี m แถว และ n คอลัมน์ จะเขียนขนาดของเมทริกซ์แทนด้วย $m \times n$

ตัวอย่าง 2.1

กำหนดให้เมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E = [1 \ 0 \ 2], F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$



จงหาขนาดของเมทริกซ์

วิธีทำ

เมทริกซ์ A มี 3 แถว 3 คอลัมน์ ดังนั้นมีขนาดเป็น 3×3

เมทริกซ์ B มี 2 แถว 3 คอลัมน์ ดังนั้นมีขนาดเป็น 2×3

เมทริกซ์ C มี 3 แถว 2 คอลัมน์ ดังนั้นมีขนาดเป็น 3×2

เมทริกซ์ D มี 3 แถว 1 คอลัมน์ ดังนั้นมีขนาดเป็น 3×1

เมทริกซ์ E มี 1 แถว 3 คอลัมน์ ดังนั้นมีขนาดเป็น 1×3

เมทริกซ์ F มี 2 แถว 2 คอลัมน์ ดังนั้นมีขนาดเป็น 2×2

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrices)

คือ เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) นั่นคือ จำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์เท่ากัน โดยที่มีสมาชิกในแนวทแยง (diagonal) เป็น 1 ทั้งหมด และเขียนแทนด้วย I_n สำหรับเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เป็นต้น}$$

บทนิยาม 2.2 (เมทริกซ์ทั่วไป) ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เขียนแทนด้วย

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาขนาดของเมทริกซ์ต่อไปนี้

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

c) $[1 \ 2 \ 0 \ -3 \ 2]$

2. จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้อยู่ในรูปแบบใด

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. จงหาผลเฉลยของเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$

03

ปริภูมิเวกเตอร์ Vector Space

สำหรับบทนี้จะแนะนำกระบวนต่าง ๆ ของเวกเตอร์ โดยจะแนะนำความรู้พื้นฐาน
ของเวกเตอร์และการดำเนินการที่สำคัญของเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) คือแนวคิดที่สำคัญในคณิตศาสตร์และคณิตศาสตร์เชิงเส้น เป็นเซตของเวกเตอร์ที่มีการกำหนดสองการดำเนินการ คือ การบวกเวกเตอร์และการคูณด้วยค่าคงที่ หรือเรียกว่า “สเกลาร์” (scalar multiplication) โดยที่การดำเนินการเหล่านี้ต้องประกอบด้วยกฎหรือคุณสมบัติที่เฉพาะเอาไว้ คุณสมบัติเหล่านี้กำหนดวิธีที่สามารถรวมและปรับขนาดเวกเตอร์ได้ เพื่อมั่นใจให้เซตนี้เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ปริภูมิเวกเตอร์สามารถเป็นแบบมีขนาดจำกัด (finite-dimensional) หรือแบบมีขนาดไม่จำกัด (infinite-dimensional) ขึ้นอยู่กับจำนวนของเวกเตอร์ที่ต้องการในการสร้างฐาน (basis) สำหรับปริภูมิ ตัวอย่างของปริภูมิเวกเตอร์ที่พบบ่อย คือ ปริภูมิยูคลิด (Euclidean spaces) (เช่น R^n สำหรับจำนวนจริง) ปริภูมิของฟังก์ชัน และปริภูมิของพหุนาม ปริภูมิเวกเตอร์เป็นสิ่งสำคัญในคณิตศาสตร์เชิงเส้น การวิเคราะห์ฟังก์ชัน และหลายสาขาของคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ต่าง ๆ โดยให้กรอบในการเข้าใจและแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเวกเตอร์และการแปลงเชิงเส้น สำหรับบทนี้จะไม่มีการพิสูจน์ในหลายทฤษฎีบท โดยผู้สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากรายการอ้างอิงท้ายเล่ม

3.1 เวกเตอร์ในปริภูมิยูคลิด (Euclidean space)

พิจารณานิยามของเวกเตอร์ ดังนี้

บทนิยาม 3.1 เวกเตอร์ (vector) คือ จำนวนจริง $u_1, u_2, \dots, u_n$ ที่ถูกจัดเรียงและเขียนอยู่ในรูป

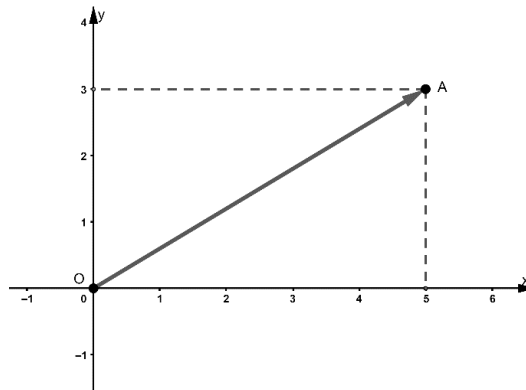
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

หรือ $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ เซตของเวกเตอร์ทั้งหมดจำนวน n สมาชิกจะกำหนดโดย R^n

สำหรับ $u_1, u_2, \dots, u_n$ ในบทนิยาม จะเรียกว่า ส่วนประกอบของเวกเตอร์ (component) เวกเตอร์ที่เขียนในแนวตั้ง จะเรียกว่า เวกเตอร์หลัก (column vector) และเวกเตอร์ที่เขียนในแนวนอน จะเรียกว่า เวกเตอร์แถว (row vector)



ระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate system)



จุด A คือจุด $(5,3)$ นั่นคือ $x=5$ และ $y=3$ ในบางครั้งเขียนแทนด้วย $A(5,3)$

$\overline{OA}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่ง ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O และจุดปลายที่จุด A โดยที่จุด O คือจุดกำเนิดมีพิกัดเป็น $(0,0)$ บางครั้งอาจเขียนแทนด้วย $\vec{A}$ หรือเรียกชื่อใด ๆ เช่น $\vec{u}$

ในการเขียนมิติของปริภูมิจะใช้ R^n โดยที่ n คือจำนวนมิติ เช่น ในปริภูมิสองมิติ จะแทนด้วย R^2 ซึ่งจุดแทนด้วย (x,y) ในปริภูมิสามมิติ จะแทนด้วย R^3 และจุดแทนด้วย (x,y,z)

เวกเตอร์คือบางสิ่งบางอย่างที่มีขนาดและทิศทาง โดยจะต้องมีจุดเริ่มต้นและจุดปลาย ในปริภูมิสองมิตินั้น สมาชิกของเวกเตอร์จะมี 2 ตัว และเขียนแทนเวกเตอร์ด้วยตัวอักษรและลูกศร เช่น เวกเตอร์ $\vec{u} = (1,2)$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดปลายอยู่ที่ $(1,2)$

บทนิยาม 3.2 ให้ $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ได้ว่า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากันก็ต่อเมื่อ

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n$$

บทนิยาม 3.3 ให้ $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n และให้ c เป็นค่าคงที่



แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $\vec{u} = (-2, 3)$ และ $\vec{w} = (-3, -2)$ จงหาเวกเตอร์ $\vec{v}$ แต่ละข้อต่อไปนี้

a) $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$ b) $\vec{v} = \vec{u} + 2\vec{w}$ c) $\vec{v} = \frac{1}{2}(3\vec{u} + \vec{w})$

2. จงหา $\vec{w}$ ถ้ากำหนดให้ $\vec{u} = (1, -1, 0, 1)$ และ $\vec{v} = (0, 2, 3, -1)$ แต่ละข้อต่อไปนี้

a) $2\vec{w} = \vec{u} - 3\vec{v}$ b) $\frac{1}{2}\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

3. จงเขียน $\vec{v}$ ให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ และ $\vec{u}_3$ (ถ้าสามารถเขียนได้)

a) $\vec{u}_1 = (2, 3, 5), \vec{u}_2 = (1, 2, 4), \vec{u}_3 = (-2, 2, 3), \vec{v} = (10, 1, 4)$

b) $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 2), \vec{u}_2 = (2, 3, 5, 6), \vec{u}_3 = (-3, 1, -4, 2), \vec{v} = (0, 5, 3, 0)$

4. จงตรวจสอบว่า $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1, x_2 \text{ และ } x_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$ และ $V = R^4$ เป็นปริภูมิย่อยของ V หรือไม่

5. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ W ขนาด 2×2 ในรูป

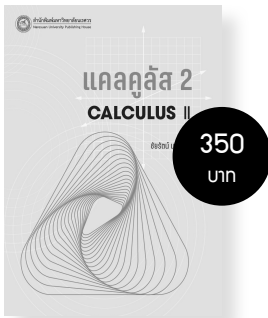
$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ $V = M_{22}$ หรือไม่

6. จงตรวจสอบว่า $W = \{(x_1, 0, x_3) : x_1 \text{ และ } x_3 \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^3 หรือไม่

7. จงตรวจสอบว่า $W = \{(a, b, a + 2b) : a \text{ และ } b \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^3 หรือไม่

8. จงตรวจสอบว่า $W = \{(x_1, x_2, x_1 x_2) : x_1 \text{ และ } x_2 \text{ เป็นจำนวนจริง}\}$ เป็นปริภูมิย่อยของ R^3 หรือไม่

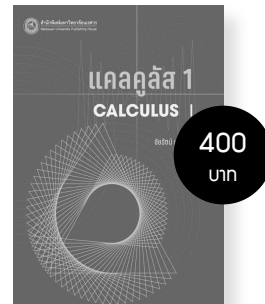


แคลคูลัส 2 Calculus II

ผู้แต่ง : รศ. ดร.ชัยรัตน์ มदनาค

แคลคูลัส 2 (Calculus II) เป็นเนื้อหาส่วนที่สองของกลุ่มแคลคูลัสที่มี การเพิ่มเติมพีชคณิตเชิงเส้นที่เป็นประโยชน์กับบางสาขาของวิศวกรรมศาสตร์ ซึ่งประกอบไปด้วยเรื่องลำดับและอนุกรมและการตรวจสอบความลู่เข้า โดยแบ่งเนื้อหาในส่วนนี้เป็น การหาลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบการลู่เข้า การพิจารณาความลู่เข้าของอนุกรมโดยใช้เทคนิคต่าง ๆ เช่น การใช้การเปรียบเทียบ ลิมิตและการเปรียบเทียบ การใช้ปริพันธ์ การใช้อัตราส่วน และการใช้วิธีค่าราก สำหรับเนื้อหาในส่วนที่สองได้แนะนำนิยามของเมทริกซ์ การดำเนินการของเมทริกซ์ และการประยุกต์ใช้เมทริกซ์ เช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ เป็นต้น และเนื้อหาส่วนสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้เป็นเรื่องปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งมีเนื้อหาครอบคลุม การตรวจสอบ ปริภูมิย่อย การหาฐานและมิติ และการหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ หนังสือเล่มนี้ได้นำเสนอการทดสอบลำดับและอนุกรม และหลักการทางพีชคณิตที่สำคัญและเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอดสำหรับศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง เช่น วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และอื่น ๆ อีกทั้งสามารถเป็นความรู้พื้นฐานสำหรับ การทำวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบสมการเชิงเส้นได้อีกด้วย

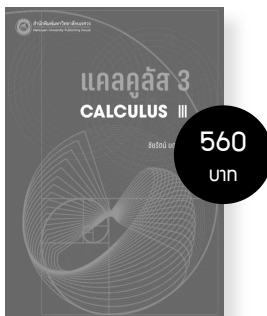
หนังสือแนะนำ



แคลคูลัส 1 Calculus I

ผู้แต่ง : รศ. ดร.ชัยรัตน์ มदनาค

แคลคูลัสโดยทั่วไปแล้วประกอบด้วยเนื้อหา 3 ส่วน คือ แคลคูลัส 1 แคลคูลัส 2 และแคลคูลัส สำหรับหนังสือแคลคูลัส 1 เนื้อหาจะประกอบไปด้วย พื้นฐานการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้หลักการอุปนัย เชิงคณิตศาสตร์ การหาลิมิตของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์ การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันและการประยุกต์ และเทคนิคในการหาปริพันธ์ เป็นต้น เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้เป็นเนื้อหาของแคลคูลัสในส่วนแรก ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการต่อยอด ในแคลคูลัสระดับสูง ดังนั้น หนังสือเล่มนี้จึงนำเสนอตัวอย่าง บทนิยาม และทฤษฎีบทอย่างละเอียด และง่ายต่อการเข้าใจในทุกขั้นตอน มีการแทรกความรู้พื้นฐานต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น เพื่อทำให้การแก้ปัญหาบรรลุสู่เป้าหมาย เหมาะสมกับทุกคนที่ต้องใช้ความรู้พื้นฐานทางแคลคูลัสในการเรียนการสอน ประกอบอาชีพ หรือเสริมความรู้เพิ่มเติม



แคลคูลัส 3 Calculus III

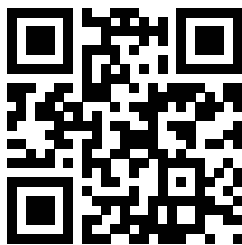
ผู้แต่ง : รศ. ดร.ชัยรัตน์ มदनาค

แคลคูลัส 3 (Calculus III) เป็นเนื้อหาขั้นตอนสุดท้ายของแคลคูลัส หนังสือ เล่มนี้แบ่งเป็นสองส่วน ในส่วนแรกเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งและอันดับสูง การใช้ผลการแปลงลาปลาซและลาปลาซผกผันสำหรับการหาผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับส่วนที่สองเป็นการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชัน หลายตัวแปรและแคลคูลัสของเวกเตอร์ เช่น ปริพันธ์ตามผิวและทฤษฎีบทของเกาส์และสโตกส์ เป็นต้น ทฤษฎีบทและตัวอย่างในหนังสือเล่มนี้ มีความละเอียดสูงและชัดเจน ซึ่งเหมาะสมกับผู้ที่มีความสนใจแคลคูลัสในทุกระดับ ทุกอาชีพ โดยเฉพาะผู้ที่ต้องการคำปรึกษา ทางด้านแคลคูลัสสามารถศึกษาและเข้าใจได้ด้วยตนเอง



สำนักพิมพ์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

สั่งซื้อหนังสือออนไลน์ จัดส่งถึงบ้านสะดวกรวดเร็ว



สั่งซื้อทันที

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่
ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

✉ nuph@nu.ac.th

📘 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

☎ 0 5596 8833-8836

🐦 [nu_publishing](https://www.facebook.com/nu_publishing)



NUPH
online store
www.nupress.grad.nu.ac.th