



ทฤษฎีตัวแทนของกลุ่มจำกัด

Representation Theory of Finite Groups

กิติติ รอนาทศ

ตัวอย่าง



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

Naresuan University Publishing House

www.nupress.grad.nu.ac.th

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

กิจติ รอดเทศ.

ทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัด.-- พิษณุโลก: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2559.
162 หน้า.
1. โฟไนต์กรุป. 2. พีชคณิต. I. ชื่อเรื่อง.

512.23

ISBN 978-616-7902-87-6

สพท. 016

ทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัด

กิจติ รอดเทศ



สงวนลิขสิทธิ์โดยสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

พิมพ์ครั้งที่ 1 กรกฎาคม พ.ศ. 2559 จำนวนพิมพ์ 300 เล่ม ราคา 250 บาท

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

ผู้จัดพิมพ์

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

มีวางจำหน่ายที่

- ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อาคารวิทยุ ชั้น 10 ซอยจุฬาลงกรณ์ 64 ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
สาขา ศาลาพระแก้ว กรุงเทพฯ โทร. 0-2218-1000-3
สยามสแควร์ กรุงเทพฯ โทร. 0-2218-9888, 0-2255-4435
มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-5
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา โทร. 044-216131-2
มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี โทร. 0-3839-855-9
โรงเรียนร้อยพระจุลจอมเกล้า (รจ.จก.) จังหวัดนครนายก โทร. 037-393-023, 037-393-036
จัดสรร กรุงเทพฯ โทร. 0-2160-5301
รัตนานิเจอร์ จังหวัดนนทบุรี โทร. 0-2950-5408-9
มหาวิทยาลัยพะเยา โทร. 0-5374-6799, 0-5446-6800
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี โทร. 044-922662-3
สาขาย่อยคอมพิวเตอร์ กรุงเทพฯ โทร. 0-2218-3979
- สยามอินเตอร์บุ๊คส์ สาขา 100 ปี 3-5 ถนนเอกาทศรถ ตำบลในเมือง อำเภอเมืองพิษณุโลก จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0-5526-162
สาขา มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารขวัญเมือง จังหวัดพิษณุโลก โทร. 0-5526-1616
ศูนย์การเรียนรู้พัฒนาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสารเทศบาลนครพิษณุโลก ถนนขุนพิเรนทรเทพ จังหวัดพิษณุโลก โทร. 084-814-7800
- ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ อาคารวิทยุบริการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 50 ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0-2579-0113
- ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ อาคารอเนกประสงค์ ชั้น 1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0-2613-3899, 0-2623-6493
สาขา ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ โทร. 0-5394-4990-1
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ จังหวัดสงขลา โทร. 0-7428-2980, 0-74282981
- ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยขอนแก่น 123 หมู่ 16 ถนนมิตรภาพ ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น 40000 โทร. 0-4320-2842

กองบรรณาธิการ

กองบรรณาธิการจัดทำเอกสารสิ่งพิมพ์ทางวิชาการของสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

ออกแบบปก

สรญา แสงเย็นพันธ์ image by www.freepik.com

พิมพ์ที่

ห้างหุ้นส่วนจำกัด เอ็ม แอนด์ เอ็ม เลขอร์พริ้นต์ 1491, 1493-1495 ถนนพระราม 4 แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทร. 0-2215-3999

คำนำ

ทฤษฎีตัวแทน (Representation Theory) เป็นศาสตร์สาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ ที่มีจุดกำเนิดในยุคปลายของศตวรรษที่ 18 โดยมีผู้นำหลักในสาขาวิชานี้คือ โฟรเบเนียส (G. Frobenius) ชูร์ (I. Schur) และ เบิร์นไซด์ (W. Burnside) วัตถุประสงค์หลักของการพัฒนาทฤษฎีตัวแทนในช่วงเริ่มต้น คือ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือหลักในการศึกษาทฤษฎีกรุป โดยใช้วิธีการทางพีชคณิตเชิงเส้น

ผลลัพธ์ที่สำคัญอย่างยิ่งจากศาสตร์นี้คือ ทฤษฎีบทพีควของเบิร์นไซด์ (Burnside's pq-Theorem) ซึ่งกล่าวว่า กรุปที่ไม่ใช่อาบิเลียนกรุป และมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $p^a q^b$ จะไม่เป็นกรุปเชิงเดียว (Simple group) (กรุปที่ไม่มีกรุปย่อยปรกติแท้ (Proper normal subgroup)) เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ทุกๆ กรุปที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $p^a q^b$ เป็นโซลเวเบิลกรุป (Solvable group) ซึ่งการพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าวนี้ ใช้ทฤษฎีตัวแทนเป็นเครื่องมือหลัก และต้องใช้เวลาหลังจากนั้นหลายทศวรรษจึงได้มีการค้นพบการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวโดยใช้เพียงทฤษฎีกรุป นอกจากนี้ ทฤษฎีตัวแทนยังมีบทบาทที่สำคัญในการศึกษาประเภทของกรุปเชิงเดียวประเภทจำกัดอีกด้วย

อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีตัวแทนไม่ได้มีบทบาทต่อทฤษฎีกรุปเพียงเท่านั้น แต่ยังเป็นปัจจัยหลักต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาของคณิตศาสตร์ สถิติ เคมี และฟิสิกส์ ทั้งแนวบริสุทธิ์และแนวประยุกต์ นอกเหนือจากการศึกษาทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัดยังมีการศึกษาทฤษฎีตัวแทนของกรุปอนันต์ การศึกษาตัวแทนบนปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนามต่างๆ ไม่จำกัดเฉพาะสนามของจำนวนเชิงซ้อน หรือกระทั่งขยายไปสู่ตัวแทนบนมอดูล หรือ พีชคณิตประเภทอื่นๆ ซึ่งได้ก่อให้เกิดทฤษฎีที่สำคัญในหลากหลายวิชาเช่น โทโพโลยีเชิงพีชคณิต (Algebraic Topology) เรขาคณิตเชิงพีชคณิต (Algebraic Geometry) ทฤษฎีจำนวนวิเคราะห์ (Analytic Number Theory) คอมบินาทอริก (Combinatoric) เป็นต้น

โดยทั่วไปในปัจจุบันนี้ นิยมใช้ทฤษฎีมอดูล (Module Theory) และทฤษฎีเวดเดอร์เบิร์นสำหรับพีชคณิตกึ่งเชิงเดียว (Wedderburn Theory of Semisimple Algebra) เพื่ออธิบายทฤษฎีตัวแทน ซึ่งต่างจากแนวทางการอธิบายทฤษฎีนี้ในช่วงเริ่มต้นที่อธิบายโดยใช้การวิเคราะห์ฟูรีเยต์แบบไม่เชื่อมโยง (Discrete Fourier Analysis) ดังนั้น เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าถึงเนื้อหา เป้าหมายหลักของตำราเล่มนี้ จึงมุ่งทำความเข้าใจองค์ประกอบหลักที่สำคัญในทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัดเหนือสนามจำนวนเชิงซ้อน โดยใช้ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีกรุป และพีชคณิตเชิงเส้น โดยใช้ความรู้จากหนังสือ [9] และ [8] ในบรรณานุกรม เป็นแนวทางหลัก

ในการเขียนตำราเล่มนี้ ผู้เขียนได้ใช้ศัพท์บัญญัติของราชบัณฑิตยสถานมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ และความรู้ที่นำมาจากแหล่งอ้างอิงในบรรณานุกรมนั้น ถือได้ว่าเป็นความรู้ที่เป็นมาตรฐานในทางทฤษฎีตัวแทน ดังนั้น ผู้เขียนจะไม่ได้อ้างอิงแบบเชิงอรรถไว้ แต่จะอ้างอิงไว้ที่บรรณานุกรม

สำหรับการนำเสนอ ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาไว้ทั้งหมด 7 บท โดยที่บทแรกเป็นความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ในตำราเล่มนี้ บทที่ 2 และบทที่ 3 เป็นการอธิบายนิยามและสมบัติของทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัดรวมถึงทฤษฎีแครกเตอร์ โดยเฉพาะตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ และความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากของแครกเตอร์ บทที่ 4 เป็นความสัมพันธ์ระหว่างกรุปแอดชันกับตัวแทนที่สัมพันธ์กับการแยกชั้น ในบทที่ 5 เป็นการอธิบายการสร้างตัวแทนขึ้นจากตัวแทนของกรุปย่อยที่เป็นภาตัวแทนเหนียวนำ รวมถึงเกณฑ์การลดทอนไม่ได้ของตัวแทนเหนียวนำ บทที่ 6 เป็นการอธิบายเรื่องตัวแทนของกรุปสมมาตร และในบทสุดท้ายเป็นการนำทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัดไปประยุกต์ใช้ในทฤษฎีกรุป โดยเฉพาะการพิสูจน์ทฤษฎีบทพีเคของเบิร์นไซด์ และเพื่อให้เข้าใจเนื้อหาในแต่ละบทได้ดีมากขึ้น ผู้เขียนได้เพิ่มแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่านไว้ตอนท้ายของแต่ละบทด้วย

ผู้เขียนขออ้อมรำลึกถึงพระคุณครูบาอาจารย์ในทุกระดับชั้นที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ทำให้ผู้เขียนมีแนวทางในการประกอบอาชีพ สอน วิจัย รวมถึงการเขียนตำราเล่มนี้ ขอผิดพลาดประการใดอันเนื่องจากเอกสารนี้ ผู้เขียนขออ้อมรับเพื่อนำมาพิจารณาปรับปรุงในโอกาสต่อไป

กิจติ รอดเทศ
ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

สารบัญ

1	ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีกรุปและพีชคณิตเชิงเส้น	1
1.1	บทนิยาม ตัวอย่าง และสมบัติพื้นฐานทางทฤษฎีกรุป	1
1.2	ทฤษฎีพื้นฐานหลัก	7
1.3	สัญลักษณ์และบทนิยามพื้นฐานทางพีชคณิตเชิงเส้น	10
1.4	ปริภูมิผลคูณภายใน	12
1.5	ความรู้พื้นฐานในหัวข้ออื่นๆ ทางพีชคณิตเชิงเส้น	17
2	ตัวแทนกรุป	25
2.1	บทนิยามพื้นฐานและตัวอย่าง	25
2.2	ทฤษฎีบทของแมสเชอและการลดทอนได้อย่างสมบูรณ์	34
2.3	ผลคูณเคอเรย์ของตัวแทน	38
3	ทฤษฎีค่าแรกเตอร์และความสัมพันธ์เชิงตั้งฉาก	49
3.1	มอร์ฟิซึมของตัวแทน	49
3.2	ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉาก	54
3.3	ค่าแรกเตอร์และฟังก์ชันคลาส	59
3.4	ตัวแทนแบบปกติ	69
3.5	ตัวแทนของอาบีเลียนกรุป	76
3.6	ทฤษฎีมิติของค่าแรกเตอร์	77

4	กรุปแอคชั่นและตัวแทนแบบสับเปลี่ยน	89
4.1	กรุปแอคชั่น	89
4.2	ตัวแทนแบบสับเปลี่ยน	92
5	ตัวแทนเหนียวนำ	101
5.1	คาแรกเตอร์เหนียวนำและส่วนกลับโพรมิอุส	101
5.2	ตัวแทนเหนียวนำ	104
5.3	เกณฑ์การลดทอนไม่ได้ของแมคคีย์	109
6	ตัวแทนของกรุปสมมาตร	117
6.1	ผลแบ่งกันและแทบลิว	117
6.2	การสร้างตัวแทนที่ลดทอนไม่ได้ของกรุปสมมาตร	122
7	บทประยุกต์ทางทฤษฎีกรุป	133
7.1	คาแรกเตอร์ค่าจริงและทฤษฎีของเบิร์นไซด์	133
7.2	โซลเอเบิลกรุป	137
7.3	ทฤษฎีบทพีคิวของเบิร์นไซด์	141
	บรรณานุกรม	149
	ดัชนี	150

ตัวอย่าง

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีกรุป และพีชคณิตเชิงเส้น

ในบทนี้จะเป็นการรวบรวมความรู้พื้นฐานทางทฤษฎีกรุปและพีชคณิตเชิงเส้นที่จะนำไปใช้ตลอดทั้งเอกสารนี้ สำหรับการพิสูจน์ที่เป็นที่รู้จักและเป็นมาตรฐานอยู่แล้ว จะถูกละไว้ ซึ่งผู้อ่านสามารถศึกษาการพิสูจน์ดังกล่าวได้จากหนังสือพีชคณิตและหนังสือพีชคณิตเชิงเส้นที่ไป สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space) ถ้ามีได้กล่าวไว้อย่างอื่น ให้หมายถึง ปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดเหนือสนามจำนวนเชิงซ้อน \mathbb{C}

1.1 บทนิยาม ตัวอย่าง และสมบัติพื้นฐานทางทฤษฎีกรุป

กรุป (Group) G คือเซต G ที่มีการดำเนินการทวิภาค (Binary operation) $\cdot : G \times G \rightarrow G$ (เขียนแทน $\cdot(g, h)$ ด้วย $g \cdot h$) ซึ่งมีสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม (Associative) เอกลักษณ์ (Identity) และมีอินเวอร์ส (Inverse) นั่นคือ

- $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$ สำหรับแต่ละ $g, h, k \in G$
- มี $e \in G$ ที่ซึ่ง $e \cdot g = g = g \cdot e$ สำหรับทุกๆ $g \in G$
- สำหรับแต่ละ $g \in G$ จะมี $g^{-1} \in G$ ที่ซึ่ง $g^{-1} \cdot g = e = g \cdot g^{-1}$

กรณีกกรุป G มีสมบัติสลับที่ (Commutative) กล่าวคือ $g \cdot h = h \cdot g$ สำหรับทุกๆ $g, h \in G$ จะเรียกรกรุป G ว่าเป็น อับิเลียนกรุป (Abelian group) นอกจากนี้ นิยมเขียนแทน $g \cdot h$ ด้วย gh สำหรับกรุปใดๆ และสำหรับอับิเลียนกรุปใดๆ นิยมเขียนแทน $g \cdot h, e$ และ g^{-1} ด้วย $g + h, 0$ และ $-g$ ตามลำดับ มากกว่านั้น จะเรียก จำนวนเชิงการนับ (Cardinality) ของเซต G ซึ่งเขียนแทนด้วย $|G|$ ว่าเป็น อันดับ (Order) ของกรุป G ซึ่งถ้า $|G|$ เป็นจำนวนจำกัด จะเรียกรกรุป G ว่าเป็น กรุปจำกัด (Finite group)