แคลคูลัส 3
CALCULUS III

ชัยรัตน์ มดนาค

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House
www.nupress.grad.nu.ac.th

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร 99 หมู่ 9 อาคารมหาธรรมราชา ชั้น 1 มหาวิทยาลัยนเรศวร
ตำบลท่าโพธิ์ อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836 E-mail : nuph@nu.ac.th
www.nupress.grad.nu.ac.th สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร @nupress

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ
National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

ชัยรัตน์ มดนาค.

แคลคูลัส 3 = Calculus III.--พิษณุโลก : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2566.
554 หน้า.
1. แคลคูลัส I. ชื่อเรื่อง.

515

ISBN 978-616-426-302-4

ISBN (e-book) 978-616-426-303-1

สพน. 122

ราคา **560** บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 เมษายน พ.ศ. 2566

จัดพิมพ์โดย สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

วางจำหน่ายที่
1. **ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**
   ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330 โทร. 0 2218 9812
2. **ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์**
   ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0 2579 0113
3. **ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์**
   ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0 2613 3899
4. **สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร**
   บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารมหาธรรมราชา จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836

พิมพ์ที่ บริษัท กู๊ดเฮด พริ้นท์ติ้ง แอนด์ แพคเกจจิ้ง กรุ๊ป จำกัด 6/1 นิคมอุตสาหกรรมบางชัน ซอยเสรีไทย 58 แขวงมีนบุรี เขตมีนบุรี กรุงเทพฯ 10510

คำนำ

แคลคูลัส 3 มีเนื้อหามุ่งเน้นไปยังความรู้เรื่องการเปลี่ยนพิกัด จากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว พิกัดทรงกระบอก และพิกัดทรงกลม และการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร รวมทั้งการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์และปริพันธ์ ซึ่งเป็นพื้นฐานต่อการศึกษาขั้นสูงทางด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์และทางวิศวกรรมศาสตร์ รวมทั้งการประยุกต์ในสาขาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง โดยตำราเล่มนี้ได้เน้นการแสดงตัวอย่างในหลายรูปแบบและประยุกต์การใช้โปรแกรมรหัสเปิดจีโอจีบา (Geogebra) ในการแสดงกราฟเพื่อง่ายต่อการเข้าใจ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถมองภาพได้ง่ายขึ้นและสามารถเรียนรู้ด้วยตัวเองเพิ่มเติมได้ ซึ่งผู้พัฒนาตำราเล่มนี้หวังไว้อย่างยิ่งว่าจะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาในรายวิชาแคลคูลัสส่วนที่ 3 และสำหรับผู้ที่สนใจ

สารบัญ

1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว
(Polar Coordinate System)

ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว

(The Connection Between Polar and Cartesian Coordinates)................6

กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Graphs in Polar Coordinate)..9

เส้นโค้งรูปหัวใจและเส้นโค้งลีมาซอง (Cardioid and Limacons Curves) 16

ความสมมาตร (Symmetry).. 24

Geogrebra Classic Tips.. 36

แบบฝึกหัด.. 40

2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
(First Order Differential Equations)

สมการแยกตัวแปรได้ (Separable Equations).. 49

สมการเอกพันธ์ (Homogeneous Equations)... 60

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง (Exact Differential Equations).......................... 71

สมการแบบไม่แม่นตรง (Non-Exact Differential Equations) 76

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง (First Order Linear Differential

Equations) 82

ตัวประกอบการหาปริพันธ์ (Integrating Factor)... 86

สมการเชิงอนุพันธ์แบบมีผลเฉลยที่แน่นอน (Specific Linear Equations) 92

การประมาณค่าเชิงตัวเลข (Numerical Approximation) 99

แบบฝึกหัด... 112

3 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง
(Higher Order LinearDifferential Equations)

สมการเอกพันธ์อันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ (Second Order Linear Homogeneous Differential Equations with Constant coefficients) 119

สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์อันดับสูงเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ (Higher Order Linear Homogeneous Differential Equations with Constant Coefficients) 128

สมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ (Non-homogeneous Linear Differential Equations with Constant Coefficients) 130

แบบฝึกหัด 164

4 การแปลงลาปลาซและการแปลงลาปลาซผกผัน
(Laplace Transform and Inverse Transform)

การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) 169

การแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) 178

การแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้เศษส่วนย่อย (Partial Fractions for Inverse Laplace Transforms) 182

ทฤษฎีบทการเลื่อน (Shifting Theorems) 188

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ (Solving Linear Differential Equations Using Laplace Transforms) 196

แบบฝึกหัด 213

5 ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย
(Functions of Several Variables and Partial Derivatives)

ฟังก์ชันหลายตัวแปร (Functions of Several Variables) 219

อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives) 223

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง (Higer Order Partial Derivatives).................................. 227
กฎลูกโซ่ (Chain Rule)... 230
อนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)... 236
พื้นผิวสามมิติ (Surfaces).. 240
สมการระนาบ (Plane Equations).. 240
ทรงกลม (Sphere).. 245
ทรงกระบอก (Cylinder).. 249
พาราโบลอยด์ (Paraboloid)... 252
ทรงรี (Ellipsoid)... 255
กรวย (Cone)... 258
สมการไฮเพอร์โบลอยด์ 1 ชิ้น (Hyperboloid of One Sheet).................. 261
สมการไฮเพอร์โบลอยด์ 2 ชิ้น (Hyperboloid of Two Sheets)................ 266
ไฮเพอร์โบลิก-พาราโบลอยด์ (Hyperbolic Paraboloid)............................ 268
แบบฝึกหัด... 271

6 ปริพันธ์หลายชั้น (Multiple Integrals)

ปริพันธ์สองชั้น (Double Integrals).. 276
การสลับลำดับของการอินทิเกรต (Changing the Order of Integration)........... 289
ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วและการประยุกต์ (Double Integrals in Polar Coodinates and Applications).. 295
ปริพันธ์สามชั้น (Triple Integrals)... 313
ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก (Triple Integrals in Cylindrical Coordinates).. 329
ปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in Spherical Coordinates).. 343
แบบฝึกหัด... 358

7 แคลคูลัสของเวกเตอร์ (Vector Calculus)

ค่าเวกเตอร์และพีชคณิตของเวกเตอร์ (Calculus of Vector-Valued Functions) 364
สนามสเกลาร์ สนามเวกเตอร์ เกรเดียนท์ เคิร์ลและไดเวอร์เจนซ์ (Scalar Fields, Vector Fields, Gradient, Curl, and Divergence) 382
ปริพันธ์ตามเส้น (Line Integrals) 394
ปริพันธ์ตามเส้นสำหรับสนามเวกเตอร์ (Line Integrals of Vector Fields) 413
สนามเวกเตอร์อนุรักษ์ (Conservative Vector Fields) 419
ทฤษฎีบทของกรีน (Green's Theorem) 426
พื้นที่ของผิว (Surface Area) 437
ปริพันธ์ตามผิว (Surface Integrals) 450
ผิวสมการเสริม (Parametric Surfaces) 484
ทฤษฎีบทของสโตกส์ (Stokes' Theorem) 495
ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss' Theorem) 511
แบบฝึกหัด 523

บรรณานุกรม 529

เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 1 530
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 2 532
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 3 533
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 4 534
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 5 535
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 6 539
เฉลยแบบฝึกหัด บทที่ 7 541

ดัชนี 543

01

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

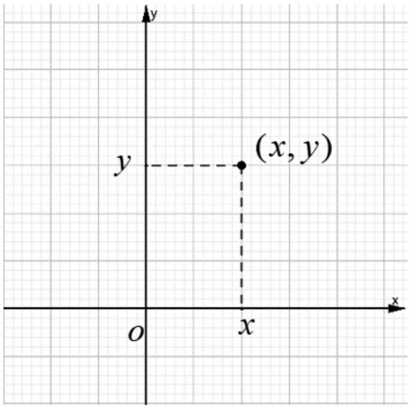
(Polar Coordinate System)

ในบางครั้งการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในระบบพิกัดฉากนั้นอาจมีความซับซ้อน และต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาหลายขั้นตอน ซึ่งในการแปลงพิกัดจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วนั้นอาจทำให้ปัญหาที่มีความซับซ้อน กลายเป็นปัญหาที่ง่ายกว่าได้ สังเกตจากการแปลงพิกัดดังนี้

ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate System)

ในระบบพิกัดฉาก

จุด (x, y) ใด ๆ บนระบบพิกัดฉากนั้น สามารถแสดงได้ดังภาพ 1.1 โดยที่แกนนอน คือ แกน x และแกนตั้ง คือ แกน y



ภาพ 1.1 จุด (x, y) ใด ๆ บนระบบพิกัดฉาก

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

สำหรับจุดใด ๆ บนระบบพิกัดเชิงขั้วนั้น จะกำหนดให้มีพิกัดเป็น (r, θ) โดยที่ r เรียกว่า เวกเตอร์รัศมี (radius vector) ซึ่งคือ ระยะทางระหว่างจุด (x, y)กับจุดกำเนิด (Origin) หรือ ขั้ว (Pole) และมุม θ เรียกว่า มุมเชิงขั้ว (Polar Angle) ซึ่งคือ มุมระหว่างเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุดดังกล่าวกับแกนเชิงขั้ว (polar axis) ox ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังภาพ 1.2

แบบฝึกหัด

1. จงลงจุดพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้และหาจุดพิกัดเชิงขั้วอื่นอีกสองจุดของจุดที่กำหนดให้ เมื่อ $(r>0, r<0)$

(a) $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $\left(-2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. จงลงจุดพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้และเปลี่ยนเป็นพิกัดฉาก

(a) $\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(b) $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

(c) $\left(-1, \dfrac{\pi}{3}\right)$

3. จงวาดกราฟของสมการที่กำหนดให้โดยเปลี่ยนเป็นสมการในระบบพิกัดฉาก

(a) $r = 2$

(b) $r = 3\sin\theta$

(c) $r = \csc\theta$

4. จงหาสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วจากสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

(a) $x = 3$

(b) $x = -y^2$

(c) $x^2 + y^2 = 2cx$

02

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

(First Order Differential Equations)

ในโลกของความเป็นจริงนั้นหลายสิ่งหลายอย่างมีความเชื่อมโยงกัน การเปลี่ยนแปลงของบางสิ่งมีผลกระทบต่ออีกสิ่ง เช่น ผู้ล่ากับผู้ถูกล่า ประชากรของทั้งสองสิ่งนี้มีความเชื่อมโยงกัน ถ้าประชากรของผู้ถูกล่ามีปริมาณมาก ก็ถือว่าเป็นแหล่งอาหารอันอุดมสมบูรณ์ของผู้ล่า ซึ่งทำให้ปริมาณของผู้ล่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย แต่เมื่อเวลาผ่านไปจำนวนของเหยื่อไม่สามารถเติบโตได้ทันกับจำนวนของผู้ล่าที่เพิ่มขึ้นได้ จึงทำให้เกิดการขาดแคลนอาหารในระบบ ดังนั้น ผลที่เกิดขึ้น คือ จำนวนผู้ล่าลดลงด้วยสาเหตุต่าง ๆ เช่น การฆ่ากันเองระหว่างผู้ล่า หรือขาดอาหารตาย คณิตศาสตร์สามารถอธิบายปรากฏการณ์นี้ได้ ซึ่งสมการอย่างง่ายที่คุ้นเคยกันก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ในบทนี้จะศึกษา สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first order differential equations)

นิยาม 2.1 กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มี x เป็นตัวแปรต้น และถ้าเขียน $y = f(x)$ จะเรียก y เป็นตัวแปรตาม

นิยาม 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ สมการที่ประกอบไปด้วย ตัวแปรต้น x และตัวแปรตาม y ที่อยู่ในรูป $F(x, y, y') = 0$

หมายเหตุ : อนุพันธ์สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ เช่น y' แทนอนุพันธ์อันดับหนึ่ง y'' แทนอนุพันธ์อันดับสอง และอนุพันธ์อันดับสูงมากกว่า 3 จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $y^{(n)}$ เช่น $y^{(10)}$ คือ อนุพันธ์อันดับ 10 เป็นต้น

สมการเชิงอนุพันธ์นั้น สามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้น สมการจะประกอบไปด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

เช่น $\dfrac{dy}{dt} = y + 1$ เมื่อ y เป็นฟังก์ชันของ t

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้โดยวิธีการแยกตัวแปร
   (a) $dx + e^{3x}dy = 0$
   (b) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x+6$
   (c) $2y(x+1)dy = xdx$
   (d) $ydy = 4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}}dx, y(0) = 1$
   (e) $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2+1), x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
   (f) $x^2y' = y - xy, y(-1) = -1$
   (g) $y' + 3y = 0, y(0) = -3$
   (h) $2ty - y' = 0, y(1) = 3$
   (i) $ty' + 4y = 0, y(1) = 1$
   (j) $y' - 2(\cos 2t)y = 0, y(\pi) = -2$
   (k) $\dfrac{y'}{(t^2+1)y} = 3, y(1) = 4$
2. จงหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ต่อไปนี้
   (a) $(x-y)dx + xdy = 0$
   (b) $xdx + (y-2x)dy = 0$
   (c) $(y^2+yx)dx - x^2dy = 0$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$
   (e) $-ydx + (x+\sqrt{xy})dy = 0$

03

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง

(Higher Order LinearDifferential Equations)

ในเนื้อหาส่วนนี้จะพิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่มากกว่าสองที่เป็นเชิงเส้น ซึ่งมีความสำคัญอย่างมากในการประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาต่าง ๆ ก่อนที่จะเข้าสู่การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ จะขอนำเสนอทฤษฎีบทที่สำคัญก่อน ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $p(x), q(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a,b) และให้ x_0 อยู่ในช่วง (a,b) แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x),\ \ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง (a,b)

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ที่หาค่าได้บนช่วง $a < x < b$ โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง (a,b) แล้วสำหรับค่าคงที่ c_1 และ c_2 ใด ๆ ผลรวมเชิงเส้น (linear combination)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เช่นกัน

$\{y_1, y_2\}$ เรียกว่า เป็นเซตของผลเฉลยพื้นฐาน (fundamental set of solutions) และมีความเป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน (linearly independent) วิธีการหาผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นจะแนะนำต่อไป เพื่อความสะดวกต่อการอ่านสมการ ในหนังสือเล่มนี้ ส่วนใหญ่จะเขียน y แทน $y(x)$ เว้นแต่ระบุเพิ่มเติมในบางส่วน

วิธีทำ โดยจะทำตามขั้นตอนเหมือนกับตัวอย่างก่อนหน้า แต่ไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป

ขั้นตอนที่ 1 หา y_h โดยกำหนดให้ $y^{(4)} + y^{(3)} = 0$

ดังนั้นได้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะเป็น

$$r^4 + r^3 = 0$$

$$r^3(r+1) = 0$$

ได้ $r^3 = 0$ หรือ $r+1=0$ ซึ่งได้ $r=0$ ซ้ำกัน 3 ครั้ง และ $r=-1$

ดังนั้นได้ $$y_h = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} + c_3x^2e^{0x} + c_4e^{-x}$$

$$= c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$$

ขั้นตอนที่ 2 หา y_p โดยพิจารณาจาก $f(x) = 1 - e^{-x}$

ขั้นแรก เขียน y_p ได้เป็น $y_p = A + Be^{-x}$

ตรวจสอบ จะเห็นว่ามีเทอม A ใน y_p ซ้ำกับเทอม c_1 ใน y_h และ Be^{-x} ใน

y_p ซ้ำกับเทอม c_4e^{-x} ใน y_h

ปรับปรุง คูณ A ด้วย x^3 เพราะถ้าคูณด้วย x จะทำให้ไปซ้ำกับเทอม c_2x เช่นเดียวกันกับการคูณด้วย x^2 ก็จะไปซ้ำกับเทอม c_3x^3 และคูณ

Be^{-x} ด้วย x ดังนั้นได้ $y_p = Ax^3 + Bxe^{-x}$

ตัวอย่าง 3.28

จงเขียนผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 5y' + 4y = x^2e^{5x}$$

วิธีทำ โดยจะทำตามขั้นตอนเหมือนกับตัวอย่างก่อนหน้า แต่ไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป

ขั้นตอนที่ 1 หา y_h โดยกำหนดให้ $y''-5y'+4y=0$

ได้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะและมีค่ารากเป็น

$$r^2-5r+4=0$$
$$(r-4)(r-1)=0$$
$$r=4,1$$

ดังนั้นได้ $y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{x}$

ขั้นตอนที่ 2 หา y_p โดยพิจารณาจาก $f(x)=x^2e^{5x}$

ขั้นแรก เขียน y_p ซึ่งได้ $y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{5x}$

ตรวจสอบ จะเห็นว่าไม่มีเทอมใดซ้ำกันเลยระหว่าง y_p กับ y_h เนื่องจากกำลังของฟังก์ชันเลขชี้กำลังไม่เหมือนกัน ดังนั้นได้

$$y_p=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{5x}$$

ตัวอย่าง 3.29

จงเขียนผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''-5y'+4y=e^{3x}\sin 4x$$

วิธีทำ โดยจะทำตามขั้นตอนเหมือนกับตัวอย่างก่อนหน้า แต่ไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป

ขั้นตอนที่ 1 หา y_h โดยกำหนดให้ $y''-5y'+4y=0$

ได้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะและมีค่ารากเป็น

$$r^2-5r+4=0$$
$$(r-4)(r-1)=0$$
$$r=4,1$$

ดังนั้นได้ $y_h = c_1e^{4x} + c_2e^{x}$

ขั้นตอนที่ 2 หา y_p โดยพิจารณาจาก $f(x) = e^{3x}\sin 4x$

ขั้นแรก เขียน y_p ซึ่งได้ $y_p = \left(A\cos 4x + B\sin 4x\right)e^{3x}$

จะเห็นว่าไม่มีเทอมใดของ y_p ซ้ำกับ y_h ซึ่งได้ผลเฉลยเฉพาะดังกล่าว

ตัวอย่าง 3.30

จงให้คำตอบเฉพาะ y_p ของสมการ $y'' - y' = x^3 + x + e^x - 2xe^x$

วิธีทำ สมการพหุนามลักษณะเฉพาะของสมการเอกพันธ์ คือ $r^2 - r = 0$ แล้วได้ว่า

$$r(r-1) = 0$$

มีค่ารากเป็น $r = 0$ หรือ $r = 1$ ดังนั้นได้ผลเฉลย

$$y_h = c_1e^{0x} + c_2e^{1x} = c_1 + c_2e^{x}$$

และจาก

$$f(x) = x^3 + x + e^x - 2xe^x$$

$$= x + x^3 + e^x - 2xe^x$$

เบื้องต้น พิจารณาหา y_p ในแต่ละส่วนของ $f(x)$ ดังนี้

เทอม $x + x^3$: เป็นพหุนามกำลัง 3 ดังนั้น ได้ y_pส่วนนี้ คือ $A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$

เทอม e^x : เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ได้ y_p ส่วนนี้ คือ A_4e^x

เทอม $-2xe^x$: เป็นผลคูณระหว่างพหุนามกับฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนลเชียล

ดังนั้นได้ y_p ส่วนนี้ คือ $\left(A_5x + A_6\right)e^x$

จากการสังเกต จะเห็นว่า เทอม A_0 ซ้ำกับ c_1 ใน y_h ดังนั้น จะคูณ y_p สำหรับส่วนนี้ด้วย x และเทอม A_4e^x ซ้ำกับเทอม c_2e^x ใน y_h ดังนั้น จะคูณ y_p สำหรับส่วนนี้ด้วย x เช่นเดียวกัน และเมื่อพิจารณาส่วนสุดท้าย จะมีเทอม A_6e^x ซ้ำกับ เทอม c_2e^x ใน y_h เช่นเดียวกัน ดังนั้น จะคูณ $\left(A_5x + A_6\right)e^x$ ด้วย x เพื่อแก้ปัญหา ดังนั้นได้

$$y_p = x\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3\right) + xA_4e^x + x\left(A_5x + A_6\right)e^x$$

$$= xA_0 + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + A_4xe^x + A_5x^2 + A_6xe^x$$

$$= xA_0 + \left(A_1 + A_5\right)x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + \left(A_4 + A_6\right)xe^x$$

จากการสังเกตจะเห็นว่า ไม่มีเทอมใดเลยของ y_p ซ้ำกับ y_h

ข้อสังเกต สำหรับตัวอย่างนี้ สามารถจัดรูป $f(x)$ ก่อนหา y_p ก็ได้ โดยสามารถจัดเป็น $f(x) = x + x^3 + (1-2x)e^x$ ซึ่งจะได้ y_p หลังจากปรับปรุงแล้ว เป็น

$$y_p = x\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3\right) + x\left(A_4 + A_5x\right)e^x$$

หมายเหตุ A_4e^x กับ c_2e^x ถือว่าซ้ำกันและเทอม c_1 กับ A_0 ถือว่าซ้ำกัน เพราะคือค่าคงเหมือนกัน

ตัวอย่าง 3.31

จงเขียนผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x} + e^{4x}\cos 3x$$

วิธีทำ โดยจะทำตามขั้นตอนเหมือนกับตัวอย่างก่อนหน้า แต่ไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป

ขั้นตอนที่ 1 หา y_h โดยกำหนดให้ $y'' - 8y' + 25y = 0$

ได้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะเป็น $r^2 - 8r + 25 = 0$

และมีค่ารากเป็น
$$r = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i$$

นั่นคือได้ $\alpha = 4$ และ $\beta = 3$ ดังนั้นได้

$$y_h = c_1 e^{4x} \cos 3x + c_2 e^{4x} \sin 3x$$

ขั้นตอนที่ 2 หา y_p โดยพิจารณาจาก $f(x) = 5x^3 e^{-x} - 7e^{-x} + e^{4x} \cos 3x$

ขั้นแรก เขียน y_p ซึ่งได้ $y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)e^{-x}$

$$+Ee^{-x} + \left(F \cos 3x + G \sin 3x\right)e^{4x}$$

ตรวจสอบ ซึ่งจะเห็นว่า y_h ซ้ำกับสองเทอมสุดท้ายของ y_p

ปรับปรุง คูณสองเทอมสุดท้ายของ y_p ด้วย x

ดังนั้นได้ $y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)e^{-x}$

$$+Ee^{-x} + x(F \cos 3x + G \sin 3x)e^{4x}$$

ตัวอย่าง 3.32

จงเขียนผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 6y' + 9 = x^3 + xe^{3x} + e^{3x} \sin 2x$$

วิธีทำ โดยจะทำตามขั้นตอนเหมือนกับตัวอย่างก่อนหน้า แต่ไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไป

ขั้นตอนที่ 1 หา y_h โดยกำหนดให้ $y'' - 6y' + 9 = 0$

ได้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะและมีค่ารากเป็น

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$
$$(r-3)(r-3) = 0$$

$$r = 3, 3$$

จะเห็นว่าค่ารากซ้ำกัน 2 ครั้ง ดังนั้นได้ $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

ขั้นตอนที่ 2 หา y_p โดยพิจารณาจาก $f(x) = x^3 + xe^{3x} + e^{3x}\sin 2x$

ขั้นแรก เขียน y_p ซึ่งได้ $y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) + \left(Ex + F\right)e^{3x}$

$$+\left(G\sin 2x + H\cos 2x\right)e^{3x}$$

ตรวจสอบ จะเห็นว่าเทอม $\left(Ex + F\right)e^{3x}$ ซ้ำกับเทอมของ y_h

ปรับปรุง คูณ y_p ด้วย x^2 เนื่องจากถ้าคูณด้วย x ได้ว่า Fxe^{3x} ยังซ้ำกับเทอม c_2xe^{3x}

ดังนั้นได้ว่า $y_p = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) + x^2\left(Ex + F\right)e^{3x} + \left(G\sin 2x + H\cos 2x\right)e^{3x}$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

(a) $y'' - y' - 6y = 0$

(b) $y''' + y'' - 2y = 0$

(c) $y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = 0$

(d) $16y^{(4)} + 24y^{(2)} + 9y = 0$

(e) $y^{(5)} - 16y = 0$

(f) $y'' + 6y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$

(g) $2y'' - 2y' + y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 0$

(h) $y''' + 12y'' + 36y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -7$

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

(a) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$

(b) $y'' + 3y' + 2y = 6$

(c) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

(d) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

(e) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

(f) $y'' - y' = -3$

(g) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{\frac{x}{2}}$

(h) $y'' + +4y = 3\sin 2x$

04

การแปลงลาปลาซและการแปลงลาปลาซผกผัน

(Laplace Transform and Inverse Transform)

ในเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้นนั้น ได้มีการบรรจุเนื้อหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตของฟังก์ชันไว้ ซึ่งทั้งสองกระบวนนี้เป็นการแปลงเบื้องต้น นั่นคือ แปลงจากฟังก์ชันหนึ่งเป็นอีกฟังก์ชันหนึ่ง ตัวอย่าง เช่น

ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ ถูกแปลงเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (a linear function) ด้วยการหาอนุพันธ์ นั่นคือ $\dfrac{d}{dx}x^2=2x$

ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ ถูกแปลงเป็นวงศ์ฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม (a family of cubic polynomial functions) ด้วยการหาอินทิเกรต นั่นคือ $\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}+c$
และทั้งสองกระบวนการนี้ก็มีความเป็นเชิงเส้น ซึ่งคือ

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\frac{d}{dx}f(x)+\beta\frac{d}{dx}g(x)$$

และ
$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$

โดยที่สมมติให้อนุพันธ์และอินทิเกรตหาค่าได้

ถ้าสมมติให้มีฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามสำหรับททุก x และ y แล้วอินทิเกรตจำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง ผลลัพธ์จะเป็นของอีกตัวแปรหนึ่ง ตัวอย่างเช่น $\int_1^2 2xy^2dx=3y^2$ แนวคิดเดียวกันกับ $\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ จะแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร s ซึ่งส่วนใหญ่แทนด้วย $F(s)$ และเรียกว่าเป็นผลลัพธ์จากการแปลงของ $f(t)$ โดย $K(s,t)$ เรียกว่าเคอร์แนล (kernel) ของการแปลง ซึ่งเนื้อหาในส่วนนี้ จะกล่าวถึงการใช้การแปลงโดยการอินทิเกรต (integral transforms) บนช่วง $[0,\infty)$

นิยาม 4.1 ถ้า $f(t)$ นิยามสำหรับ $t\geq 0$ แล้วได้ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_0^\infty K\left(s,t\right)f\left(t\right)dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b K\left(s,t\right)f\left(t\right)dt$$

ลู่เข้าถ้าลิมิตสามารถหาค่าได้ หรือลู่ออก ถ้าไม่สามารถหาค่าลิมิตได้

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(t) = te^{4t}$

(b) $f(t) = e^{-t}\sin t$

(c) $f(t) = t\cos t$

(d) $f(t) = 2t^4$

(e) $f(t) = 4t - 10$

(f) $f(t) = t^2 + 6t - 3$

(g) $f(t) = 1 + e^{4t}$

(h) $f(t) = \left(1 + e^{2t}\right)^2$

(i) $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 64}$

(b) $F(s) = \dfrac{3s + 5}{s^2 + 7}$

(c) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$

(d) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+2)^3}$

05

ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

(Functions of Several Variables and Partial Derivatives)

ก่อนที่จะขึ้นเรื่องอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปร พิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่ผ่านมา จากตัวอย่างต่อไปนี้ เช่น

ถ้ากำหนดให้ $f(x)=x^2+2x-1$ ได้ว่า

$$\frac{df}{dx}=2x+2$$

หรือ

$$f'(x)=2x+2$$

ถ้า $y=\sin(2x+1)$ ได้ว่า

$$y'=\cos(2x+1)\frac{d}{dx}\left(2x+1\right)$$

$$=2\cos(2x+1)$$

ถ้า $y=e^{x^2+1}$ ได้ว่า

$$y'=e^{x^2+1}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$$

$$=e^{x^2+1}2x$$

$$=2xe^{x^2+1}$$

ถ้า $y=\ln(x^2+\cos x)$ ได้ว่า

$$y'=\frac{1}{x^2+\cos x}\frac{d}{dx}\left(x^2+\cos x\right)$$

$$=\frac{2x-\sin x}{x^2+\cos x}$$

ถ้า $y=2^{\sin x}$ ได้ว่า

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f(x,y)=\ln(x+y-1)$ จงหา

   (a) $f(1,1)$

   (b) $f(e,1)$

2. กำหนดให้ $f(x,y)=x^2e^{3xy}$ จงหา $f(2,0)$

3. กำหนดให้ $f(x,y,z)=e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$ จงหา $f(2,-1,6)$

4. กำหนดให้ $g(x,y,z)=\ln\left(25-x^2-y^2-z^2\right)$ จงหา $g(2,-2,4)$

5. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (a) $f(x,y)=3x-2y^4$

   (b) $z=xe^{3y}$

   (c) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

   (d) $w=\sin\alpha\cos\beta$

   (e) $f(r,s)=r\ln(r^2+s^2)$

   (f) $u=te^{\frac{w}{t}}$

   (g) $f(x,y,z)=xy^2z^3+3yz$

   (h) $w=\ln(x+2y+3z)$

   (i) $u=xe^{-t}\sin\theta$

   (j) $f(x,y,z,t)=xyz^2\tan(yt)$

6. จงหาอนุพันธ์ที่ระบุ

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, f_x(3,4)$

   (b) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y+z}, f_z(3,2,1)$

   (c) $f(x,y)=3xy^4+x^3y^2, f_{xxy}, f_{yyy}$

06

ปริพันธ์หลายชั้น

(Multiple Integrals)

เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการแนะนำการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร โดยจะเริ่มแนะนำปริพันธ์สองชั้นก่อน

ปริพันธ์สองชั้น (Double Integrals)

จากที่ทราบกันว่า ปริพันธ์ชั้นเดียว คือ การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว $f(x)$ และเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่นิยามสำหรับทุก x บนช่วง $[a,b]$ หลักการหาค่าปริพันธ์จะใช้วิธีแบ่งโดเมนออกเป็น n ช่วง ที่มีความกว้างของช่วงเท่ากันเป็น $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ และเมื่อเลือกจุด x_i^* ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ แล้วได้ผลรวมรีมันน์ (Riemann sum) เป็น

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

โดยให้ $n \to \infty$ ได้ค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน $f(x)$ จาก a ถึง b คือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

ถ้ากำหนดให้ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ ปริพันธ์ชั้นเดียวแสดงถึงพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่อยู่เหนือแกน x ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ $f(x,y) \geq 0$ ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y)$ จะแสดงถึงปริมาตรของทรงตันที่อยู่เหนือระนาบพื้น (ระนาบ xy) โดยใช้แนวคิดเดียวกัน แบ่งบริเวณ R ที่กำหนดเป็น

$$R = [a,b]\times[c,d] = \{(x,y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

โดยแบ่งช่วงของ x และ y ออกเป็น m และ n ช่วง ตามลำดับ จะได้บริเวณ R_{ij} ที่มีความกว้างเป็นช่วง $\Delta x = [x_{i-1}, x_i]$ และ $\Delta y = [y_{j-1}, y_j]$ โดยเลือกจุด (x_{ij}^*, y_{ij}^*) ในบริเวณ R_{ij} และให้ $\Delta A = \Delta x \Delta y$ คือ พื้นที่ของบริเวณ R_{ij} ได้ว่าปริมาตรของทรงตันเหนือบริเวณ R_{ij} คือ

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

(a) $\int_1^3 \int_0^1 (1+4xy)\,dxdy$

(b) $\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin y\,dydx$

(c) $\int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8\,dxdy$

(d) $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dydx$

(e) $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\,dxdy$

2. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นต่อไปนี้

(a) $\iint_R \left(6x^2y^3-5y^4\right)dA, R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3, 0\le y\le 1\}$

(b) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}dA, R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, -3\le y\le 3\}$

(c) $\iint_R x\sin(x+y)\,dA, R=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

(d) $\iint_R xye^{x^2y}dA, R=[0,1]\times[0,2]$

3. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้ระนาบ $3x+2y+z=12$ และเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, -2\le y\le 3\}$

4. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งอยู่ใต้พาราโบลอยด์ทรงรี $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$ และเหนือระนาบสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R=[-1,1]\times[-2,2]$

5. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมโดยผิว $z=x\sqrt{x^2+y}$ และระนาบ $x=0, x=1, y=0, y=1$ และ $z=0$

07

แคลคูลัสของเวกเตอร์

(Vector Calculus)

เนื้อหาในส่วนนี้จะเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ ปริพันธ์และการประยุกต์ที่เกี่ยวข้องของเวกเตอร์ สนามเวกเตอร์ และฟังก์ชันเวกเตอร์ต่าง ๆ

ค่าเวกเตอร์และพีชคณิตของเวกเตอร์ (Calculus of Vector-Valued Functions)

สำหรับหัวข้อนี้จะพูดถึงเวกเตอร์และกระบวนการต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับเวกเตอร์ โดยจะเริ่มด้วยการแนะนำนิยามพื้นฐานต่าง ๆ ของเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

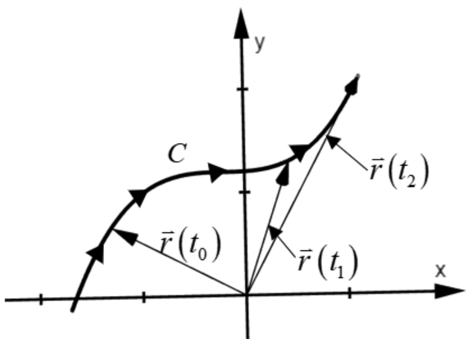
นิยาม 7.1 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (vector-valued function) คือ ฟังก์ชันซึ่งโดเมนคือเซ็ตของจำนวนจริงและเรนจ์คือเซ็ตของเวกเตอร์

นิยาม 7.2 กำหนดให้จำนวน t อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}$ ดังนั้นจะมีเวกเตอร์เพียงหนึ่งเดียวในปริภูมิสามมิติที่สมนัยกับ t ซึ่งถูกกำหนดโดย $\vec{r}(t)$ โดยที่ t เรียกว่าตัวแปรเสริม (parameter)

นิยาม 7.3 กำหนดให้มีฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงต่อเนื่องบนช่วง I แล้วได้ว่า เส้นโค้งบนระนาบ (plane curve) คือ เส้นโค้ง C ที่ประกอบไปด้วยคู่อันดับ $(f(t), g(t))$ ที่กำหนดด้วยสมการอิงตัวแปรเสริม (parametric equations)

$$x = f(t) \text{ และ } y = g(t)$$

สำหรับทุกตัวแปรเสริม t บนช่วง I



ภาพ 7.1 เส้นโค้ง C ในปริภูมิสองมิติโดยมีเวกเตอร์ตำแหน่งที่ $t = t_0, t_1, t_2$

ดัชนี

ก

กฎของโลปิตาล.....372
กฎลูกโซ่.....230
กรวย.....258
กราฟของเวกเตอร์.....367
กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว.....9
การประมาณค่าเชิงตัวเลข.....99
การแยกเศษส่วนย่อย.....182
เกร์เดียน.....386

ค

ความสมมาตร.....24
เคริล..... 390

ง

เงื่อนไขค่าขอบ.....45
เงื่อนไขค่าตั้งต้น.....45

จ

จำนวนแสดงทิศทาง.....373

ช

เชื่อมต่อ.....418

ซ

เซตของผลเฉลยพื้นฐาน.....116

ด

ไดเวอร์เจ้นส์.....390

ต

ตัวประกอบการหาปริพันธ์.....86

ท

ทฤษฎีบทการเลื่อน.....182, 188
ทฤษฎีบทของกรีน.....427
ทฤษฎีบทของเกาส์.....511
ทฤษฎีบทของสโตกส์.....495
ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์.....511

ป

ปริพันธ์ตามผิว.....450
ปริพันธ์ตามเส้น.....394
ปริพันธ์ตามเส้นสำหรับสนามเวกเตอร์.....413
ปริพันธ์ฟลักซ์.....460
ปริพันธ์สองชั้น.....276, 289
ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว.....295
ปริพันธ์สามชั้น.....313
เป็นฟังก์ชันประกอบ.....365
โปรแกรมเอ็กเซล.....104

ผ

ผลเฉลยของสมการ.....82
ผลเฉลยเฉพาะ.....82
ผลเฉลยทั่วไป.....82
ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์สมทบ.....83
ผิวสมการเสริม.....484

พ

พาราโบลอยด์.....252
พื้นที่ผิว.....437
พื้นผิวสามมิติ.....240

ฟ

ฟลักซ์อินทิกรัล.....460
ฟังก์ชันปัจจัยภายนอก.....82
ฟังก์ชันเวกเตอร์.....365
ฟังก์ชันศักย์.....421
ฟังก์ชันสองตัวแปร.....219
ฟังก์ชันเอกพันธ์.....60

ร

รอนสเกียน...117
ระบบพิกัดฉาก...2
ระบบพิกัดเชิงขั้ว...2
ระบบพิกัดทรงกระบอก......................................329
ระบบพิกัดทรงกลม...343

ล

ลาปลาซผกผัน...178
ลิมิตของฟังก์ชันเวกเตอร์......................................369

ว

วิธีการแยกเศษส่วนย่อย..56
วิธีการอินทิเกรต...99
วิธีของออยเลอร์...100
วิธีสัมประสิทธิ์ไม่เจาะจง..131
เวกเตอร์...365
เวกเตอร์ตำแหน่ง...366
เวกเตอร์แนวฉากคู่...377
เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย........................376, 377
เวกเตอร์สัมผัส...373
เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย.....................................374

ส

สนามเวกเตอร์เกร์เดียน.......................................387
สนามเวกเตอร์อนุรักษ์................................387, 419
สมการของทรงกระบอก......................................249
สมการของเวกเตอร์...369
สมการเชิงอนุพันธ์..44
สมการเชิงอนุพันธ์แบบมีผลเฉลยที่แน่นอน............93
สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง.............................71
สมการเชิงอนุพันธ์ปัญหาค่าตั้งต้น..........................45
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย...44
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น............................86
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง................................ 82
สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์อันดับสูง....................128
สมการทรงกลม..245
สมการทรงรี...255
สมการแบบไม่แม่นตรง..76
สมการแบบแยกตัวแปรได้.....................................49
สมการพหุนามลักษณะเฉพาะ.............................120
สมการไม่เอกพันธ์...82
สมการระนาบ..240
สมการวงกลม..12
สมการเอกพันธ์...63
สมการเอกพันธ์สมทบ...83
สมการเอกพันธ์อันดับสอง..................................119
สมการไฮเพอร์โบลอยด์ 1 ชิ้น.............................261
สมการไฮเพอร์โบลอยด์ 2 ชิ้น.............................265
สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน....................................126
เส้นโค้งกลีบกุหลาบ..20
เส้นโค้งที่ต่อเนื่องเป็นช่วง...................................403
เส้นโค้งธรรมดา...418
เส้นโค้งปิด...418
เส้นโค้งรูปหัวใจ...16
เส้นโค้งลิมนิสเคต..18
เส้นโค้งลีมาซอง...16
เส้นโค้งอาร์คีมีดิส..22
เส้นชั้นความสูง..386

อ

อนุกรมเทย์เลอร์...99
อนุพันธ์โดยปริยาย..236
อนุพันธ์ย่อย..223
อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง..227
อิสระจากแนวของเส้นโค้ง..................................419

ฮ

ไฮเพอร์โบลิก-พาราโบลอยด์...............................268

หนังสือแนะนำ

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

Generalized Matrix Functions

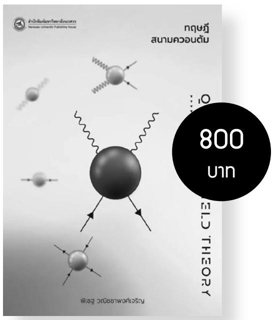
ผู้แต่ง : รศ. ดร.กิจติ รอดเทศ

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปเป็นฟังก์ชันค่าจำนวนเชิงซ้อนบนปริภูมิเมทริกซ์จัตุรัส (ภาคขยายของฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์) ซึ่งถูกนิยามไว้ในปีคริสต์ศักราช 1918 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียนามว่า อิสไซ ชูร์ หลังจากนั้นฟังก์ชันนี้ได้ถูกศึกษาอย่างกว้างขวาง ทั้งทางทฤษฎีและทางการประยุกต์ หนังสือเล่มนี้ มุ่งเน้นอธิบายถึงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป โดยแสดงให้เห็นถึงเทคนิคการพิสูจน์ที่น่าสนใจ รวมถึงการนำสมบัติที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในพีชคณิตเชิงหลายเส้น ทฤษฎีเมทริกซ์ ทฤษฎีการไม่แปรผัน และทฤษฎีกราฟ อีกทั้งได้เสนอข้อความ คาดการณ์ และปัญหาปลายเปิดที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปไว้อย่างหลากหลาย เพื่อให้ผู้อ่านนำไปวิจัยต่อยอดต่อไป

คณิตศาสตร์ประกันชีวิตเบื้องต้น

ผู้แต่ง : รศ. ดร. ชัยรัตน์ มดนาค

คณิตศาสตร์และสถิติเป็นหัวใจหลักของอุตสาหกรรมประกันภัย การทำประกันเป็นข้อตกลงระหว่าง “ผู้เอาประกัน” กับ “ผู้ให้ประกัน” โดยมี “กรมธรรม์” เป็นพันธสัญญาที่ระบุว่าผู้เอาประกันต้องจ่ายเบี้ยประกันเท่าใด และจะได้รับผลประโยชน์ใดบ้าง ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ ที่ระบุจะไม่สามารถแก้ไขได้หลังจากเซ็นสัญญาร่วมกันแล้ว สิ่งสำคัญที่สุดในกรมธรรม์ คือ เบี้ยประกันเรียกเก็บและเงินผลประโยชน์ ซึ่งจะต้องมีการคำนวณ อย่างรอบคอบโดยใช้หลักสถิติและคณิตศาสตร์ที่สำคัญหนังสือเล่มนี้รวบรวมหลักคณิตศาสตร์และสถิติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอด องค์ความรู้ให้กับผู้อ่าน โดยหลักประกันภัยในการประกันชีวิตเพียงอย่างเดียว



ทฤษฎีสนามควอนตัม

Quantum Field Theory พิมพ์ครั้งที่ 2

ผู้แต่ง : รศ. ดร. พิเชฐ วณิชชาพงศ์เจริญ

ทฤษฎีสนามควอนตัม คือ กรอบของทฤษฎีที่อธิบายสนามที่มีสมบัติทางควอนตัม โดยที่สนามคือฟังก์ชันของตำแหน่งในกาลอวกาศ หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่ออธิบายหลักการ แนวคิด และการคำนวณในทฤษฎีสนามควอนตัม โดยเน้นอภิปรายประเด็นของการนำทฤษฎีสนามควอนตัมไปอธิบายหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์อนุภาค โดยมีประเด็นหลัก ได้แก่ ความรู้เบื้องต้นที่เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาทฤษฎีสนามควอนตัม การวิเคราะห์สนามอิสระ การวิเคราะห์ทฤษฎีสนามสเกลาร์ที่มีอันตรกิริยาในตัว การวิเคราะห์พลศาสตร์ไฟฟ้าเชิงควอนตัมรวมทั้งตัวอย่างทิศทางการพัฒนาของเนื้อหาที่นอกเหนือจากที่อภิปรายในส่วนหลัก หนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับผู้สอนระดับบัณฑิตศึกษา หรือการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เนื่องจากอธิบายแนวคิด การวิเคราะห์และวิธีการคำนวณโดยละเอียด รวมทั้ง มีการวิจารณ์ประเด็นที่สำคัญและสรุปท้ายบท เพื่อให้ผู้อ่านตรวจสอบความเข้าใจ และทราบความเชื่อมโยงเบื้องต้นกับเนื้อหาอื่น นอกจากนี้ หนังสือเล่มนี้ยังมีโจทย์ปัญหาและเฉลยเพื่อให้ผู้อ่านได้เสริมความเข้าใจในเนื้อหา