



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

**INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELING
WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS**

รัชฎา วีริยะพงศ์



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House
www.nupress.grad.nu.ac.th

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

รัชฎา วีระพงษ์.

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น = Introduction to Mathematical Modeling with Differential equations.--พิษณุโลก :

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2564.

230 หน้า.

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์. 2. สมการเชิงอนุพันธ์. I. ชื่อเรื่อง.

511.8

ISBN 978-616-426-228-7

ISBN (e-book) 978-616-426-229-4

สพท. 95

ราคา 320 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 กันยายน พ.ศ. 2564



สงวนลิขสิทธิ์ ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร ห้ามการลอกเลียนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้
ไม่ว่าในรูปแบบใด ๆ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร เท่านั้น

ผู้จัดพิมพ์ สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

มีวางจำหน่ายที่ 1. ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สาขา ศาลาพระแก้ว กรุงเทพฯ โทร. 0 2218 7000-3

สยามสแควร์ อาคารวิทยกิตติ กรุงเทพฯ โทร. 0 2218 9881, 0 2255 4433

มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก โทร. 0 5526 0162-5

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา โทร. 0 4421 6131-2

มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี โทร. 0 3839 4855-9

โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า (รร.จปร.) จังหวัดนครนายก โทร. 0 3739 3023, 0 3739 3036

จัดรัสจามจุรี กรุงเทพฯ โทร. 0 2160 5301

มหาวิทยาลัยพะเยา โทร. 0 5446 6799, 0 5446 6800

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี โทร. 0 4492 2662-3

สาขาย่อยคณะครุศาสตร์จุฬาฯ โทร. 0 2218 3979

สาขาหัวหมาก โทร. 0 2374 1378

2. ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ อาคารวิทยบริการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 50 ถนนงามวงศ์วาน
แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0 2579 0113

3. ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ อาคารอเนกประสงค์ ชั้น 1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพระจันทร์
แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0 2613 3899, 0 2623 6493

สาขา ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ โทร. 0 5394 4990-1

ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ จังหวัดสงขลา โทร. 0 7428 2980, 0 7428 2981

ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา จังหวัดยะลา โทร. 0 7329 9980

4. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารมหาธรรมราชา
จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833 ถึง 8836

กองบรรณาธิการ กองบรรณาธิการจัดทำเอกสารสิ่งพิมพ์ทางวิชาการของสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

ออกแบบปก สัญญา จันทา

จัดรูปเล่ม สัญญา จันทา

พิมพ์ที่ บริษัท กู๊ดเฮด พรินท์ติ้ง แอนด์ แพคเกจจิ้ง กรุ๊ป จำกัด 6/1 นิคมอุตสาหกรรมบางชัน ซอยเสรีไทย 58 แขวงมีนบุรี เขตมีนบุรี กรุงเทพฯ 10510



สำนักพิมพ์นี้เป็นสมาชิกสมาคมผู้จัดพิมพ์
และผู้จำหน่ายหนังสือแห่งประเทศไทย
<http://www.thaibooksociety.com>



พิมพ์บน
กระดาษคุณภาพ เพื่อผลงานคุณภาพ
กระดาษอะไหล่จากกระดาษรีไซเคิล

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่
ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

✉ nuph@nu.ac.th

📘 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

☎ 0 5596 8833-8836

📧 nu_publishing



LINE @nuph

Facebook @nu_publishing

เรื่องเล่าจากปก

ภาพวาดหน้าปกเป็นรูปสะพานไม้ที่รู้จักกันในนาม “Mathematical bridge” เป็นสะพานที่สร้างสำหรับไว้ข้ามช่วงหนึ่งของแม่น้ำแคมบริเวจ Queens’ College มหาวิทยาลัยเคมบริดจ์ สหราชอาณาจักร สะพานนี้ถูกสร้างขึ้นในปี ค.ศ. 1749 โดย James Essex the Younger ด้วยฝีมือการออกแบบโดยช่างไม้ที่มีชื่อเสียง William Etheridge ซึ่งได้สานต่องานออกแบบอีกทอดหนึ่งมาจาก James King ต่อมาสะพานนี้ได้รับการซ่อมแซมและสร้างใหม่อีก 2 ครั้ง ในปี ค.ศ. 1866 และ ค.ศ. 1905 โดยยังคงรักษาโครงสร้างการออกแบบเดิม

สะพานนี้สร้างโดยใช้ท่อนไม้มาเชื่อมต่อกัน จะสังเกตได้ว่าแม้ว่าสะพานจะดูเป็นลักษณะโค้ง ทว่าก็สร้างด้วยท่อนไม้ตรงมาต่อกันทั้งสิ้น ส่วนล่างของสะพานมีโครงสร้างโค้งซึ่งเป็นส่วนโค้งของวงกลม ในส่วนล่างของสะพานนี้ ท่อนไม้แต่ละท่อนวางในแนวเส้นสัมผัสเส้นโค้งของวงกลม โดยนำมาวางเรียงต่อกันในมุมที่ทำให้เกิดการดึงและการอัดแน่นเพียงพอที่จะทำให้สะพานมีความแข็งแรงมากพอ นอกจากนี้ จุดที่ท่อนไม้ตัวแทนเส้นสัมผัสวงกลมตัดกันก็จะเชื่อมต่อกับท่อนไม้ในแนวรัศมีของวงกลม นั่นคือ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม ซึ่งท่อนไม้เหล่านี้ก็จะไปเชื่อมด้วยราวไม้ด้านบนในรูปแบบโครงตาข่ายเพื่อให้โครงสร้างของสะพานแข็งแรงมากขึ้น และนี่ก็เป็นเรื่องราวที่นำมาสู่ชื่อสะพานคณิตศาสตร์ ซึ่งสะพานไม้แห่งนี้ยังคงเป็นเสน่ห์ของเมืองเคมบริดจ์ ให้ผู้คนได้มาท่องเที่ยวและเยี่ยมชม นับแต่นั้นเป็นต้นมาจวบจนปัจจุบัน



คำนำ

ในโลกแห่งความเป็นจริง มีปัญหามากมายที่จะต้องดำเนินการหาทางจัดการแก้ไข โดยปัญหามีตั้งแต่ระดับเล็กน้อยไปจนถึงระดับใหญ่ เสี่ยงน้อยไปจนถึงเสี่ยงมาก บางปัญหาอาจใช้เงินลงทุนสูงในการแก้ไขหรือทดลองเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ยกก่อนที่จะนำไปสู่คำตอบโดยรวม หรือบางปัญหาอาจจะส่งผลกระทบต่อชีวิตและทรัพย์สินของมนุษย์เป็นจำนวนมาก ดังนั้น แนวทางหนึ่งในการแก้ปัญหาบางประเภทเพื่อลดอัตราการเสี่ยงต่อชีวิตและทรัพย์สินและประหยัดเวลาก็คือการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาเหล่านี้ ซึ่งก็คือ การนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มาช่วยในการตอบปัญหาจากสถานการณ์จริง

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หรือ **mathematical model** คือตัวแทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องการหาคำตอบซึ่งเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจสถานการณ์หรือปัญหานั้น ๆ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพมากขึ้น และเพื่อทำนายพฤติกรรมหรือกลไกทางพลศาสตร์ของสถานการณ์นั้น ๆ มากขึ้น โดยในหนังสือเล่มนี้จะเน้นที่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ขึ้นสำหรับผู้เริ่มต้นศึกษาและสนใจในเรื่องการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์และการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับตอบปัญหาในสถานการณ์จริงต่าง ๆ ซึ่งสามารถใช้ในการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี และ/หรือปริญญาโท เพื่อเป็นแนวทางในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ต่อไปได้ทั้งในมหาวิทยาลัยของรัฐและเอกชนที่เปิดสอนหลักสูตรที่มีเนื้อหาดังกล่าว รวมทั้งผู้ที่สนใจในด้านนี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนไว้ทั้งหมด 5 บท โดยมีกรอบความคิดของแต่ละบท ดังนี้

ผู้เขียนเริ่มบทที่ 1 ด้วยการให้ความหมายของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ วัตถุประสงค์ของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ อธิบายกระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในแต่ละขั้นตอน เน้นย้ำความสำคัญของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ว่าทำไมเราจึงสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และอธิบายประเภทตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ว่ามีหลายประเภทขึ้นอยู่กับว่าเราจำแนกประเภทด้วยอะไร แม้กระนั้นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก็มีข้อจำกัด ผู้เขียนจึงเขียนปิดท้ายบทที่ 1 ด้วยเรื่องข้อจำกัดของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ในบทที่ 2 ผู้เขียนอธิบายการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ทั้งอันดับหนึ่งและอันดับสูง ในการสร้างเป็นตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์อย่างง่ายสำหรับอธิบายหรือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่ไม่ซับซ้อนมาก โดยตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์มีทั้งที่เป็นเชิงเส้น ไม่เชิงเส้น และที่ต้องใช้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างโจทย์ปัญหาในบทนี้ก็รวมสถานการณ์ต่าง ๆ ของหลายศาสตร์ เช่น เคมี ชีววิทยา ฟิสิกส์ ประชากรศาสตร์ เป็นต้น

เมื่อมีตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์แล้วโดยเฉพาะในกรณีที่ตัวแทนมีความซับซ้อนมากขึ้น และไม่ใช้สมการเดียวที่สามารถหาผลเฉลยได้โดยตรง การวิเคราะห์ตัวแทนเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหาเริ่มต้นก็เป็นสิ่งสำคัญ ในบทที่ 3 นี้ผู้เขียนได้อธิบายถึงองค์ประกอบต่าง ๆ ที่จะต้องใช้ในการวิเคราะห์ตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์สำหรับตัวแทนที่ซับซ้อนขึ้นทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ได้แก่ การหาจุดสมดุล การเขียนสนามทิศทางเพื่อวาดเส้นโค้งผลเฉลยโดยสังเขป และความเสถียรในรูปแบบต่าง ๆ ของจุดสมดุลของตัวแทน

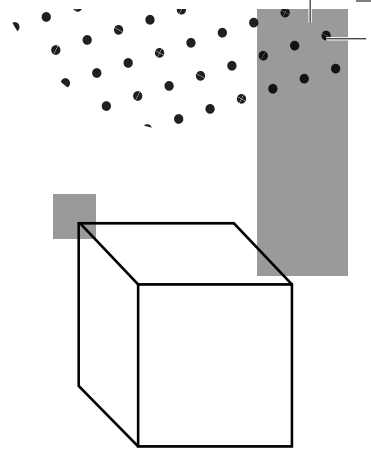
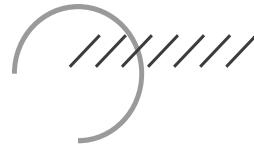
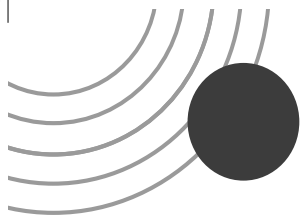
ในบทที่ 4 ผู้เขียนได้อธิบายและยกตัวอย่างตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้นและเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่นักคณิตศาสตร์ได้สร้างเพื่อศึกษาและเพิ่มความเข้าใจในหลาย ๆ ศาสตร์ เช่น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อธิบายความสัมพันธ์ของน้ำตาลกลูโคสและฮอร์โมนอินซูลิน ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่แบ่งร่างกายเป็นส่วน ๆ (compartmental model) ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อธิบายกลไกการดูดซึมสารอาหารของแบคทีเรีย นอกจากนี้ผู้เขียนก็ได้อธิบายตัวแทนที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์ประชากร เช่น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้ล่า-เหยื่อ และตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโรคติดต่อ ซึ่งเนื้อหาใน 4 บทแรกนี้ผู้เขียนได้เพิ่มแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยสำหรับผู้อ่านไว้ในแต่ละบท เพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจเนื้อหาได้ดียิ่งขึ้นไป

สำหรับในบทที่ 5 ผู้เขียนได้เขียนรวบรวมตัวอย่างของตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ในงานวิจัยจริงของนักวิจัย ไม่ว่าจะเป็นตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์โรคเบาหวาน ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้ล่า-เหยื่อ ในกรณีของกลุ่มสัตว์ต่าง ๆ รวมไปถึงตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์โรคติดต่อที่เกิดขึ้นทั้งในมนุษย์ สัตว์ พืช และระดับเซลล์ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นถึงแนวทางการทำวิจัยสำหรับคณิตศาสตร์ประยุกต์ในด้านนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่าน และเป็นแรงบันดาลใจในการทำวิจัยทางด้านตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์นี้ ผู้เขียนยินดีรับฟังข้อเสนอแนะ และหากมีข้อผิดพลาดใดในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนยินดีน้อมรับเพื่อนำมาพิจารณาปรับปรุงต่อไป

ผู้เขียนขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ แนะนำข้อคิด
ดี ๆ และสร้างแรงบันดาลใจให้ผู้เขียนจนได้เขียนหนังสือเล่มนี้จนสำเร็จลุล่วง ขอขอบคุณทุกคนที่
ช่วยเหลือในการจัดทำหนังสือเล่มนี้และเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้หนังสือเล่มนี้เสร็จลุล่วงไปด้วยดี
ขอบคุณ คุณกีฟ ยุคันต์ สันโดษ จากเพจ YUKAN สำหรับภาพวาดสะพานคณิตศาสตร์ (Mathe-
matical Bridge) แห่งเมือง Cambridge ณ สหราชอาณาจักร ที่ดงามสำหรับปกหนังสือเล่มนี้
ทำยนี้ ผู้เขียนขอขอบพระคุณบิดาและมารดาที่อบรมเลี้ยงดูและเป็นกำลังใจสำคัญในทุกก้าวของชีวิต
ซึ่งเป็นพระคุณอันยิ่งใหญ่หาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ ขอขอบคุณน้องชายสำหรับความช่วยเหลือใน
หลาย ๆ ด้าน และขอขอบคุณสามีนั่นเป็นที่รักที่เป็นแรงใจอันดีเยี่ยมยามเหนื่อยล้า เป็นกำลังใจและ
แรงสนับสนุนที่ดียิ่งเสมอมา

รัชฎา วิริยะพงศ์



สารบัญ

บทที่ 1 บทนำเกี่ยวกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	1
1.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คืออะไร	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	3
1.3 กระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	3
1.3.1 ทำความเข้าใจปัญหา (clarify the problem)	4
1.3.2 สร้างหรือตั้งสมมติฐาน (make assumptions)	5
1.3.3 กำหนดตัวแปรและความหมายของตัวแปร (define variables)	5
1.3.4 สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาผลลัพธ์ (formulate a mathematical model and solve for solutions)	5
1.3.5 วิเคราะห์ผลที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และประเมินเชิงคณิตศาสตร์ (analyze the results and do model assessment)	6
1.3.6 รายงานผลลัพธ์ (report the results)	6
1.4 ความสำคัญของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ทำไมเราจึงสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์)	6
1.5 ประเภทของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	7
1.5.1 จำแนกตามกาลเวลา	8
1.5.2 จำแนกตามผลลัพธ์จากการทำนาย	8

1.5.3	จำแนกตามความต่อเนื่อง	9
1.5.4	จำแนกตามระดับความลึกของความเข้าใจที่ต้องการ	9
1.6	ข้อจำกัดของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.	10
บทที่ 2 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์		13
2.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง	13
2.1.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เชิงเส้น (linear models).	14
2.1.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้น (nonlinear models)	32
2.1.3	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (modeling with system of differential equations)	41
2.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง	47
บทที่ 3 องค์ประกอบสำหรับการวิเคราะห์หัตถ์แบบเชิงคณิตศาสตร์		61
3.1	การหาจุดสมดุล (Equilibrium Points or Steady States)	61
3.2	การทำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นเชิงเส้นมากขึ้น (Linearization)	63
3.3	สนามทิศทาง (Direction Field) และ Nullclines	66
3.4	ความเสถียรในรูปแบบต่าง ๆ ของจุดสมดุล (Stability Classification of Equilibrium Points).	80
3.5	เงื่อนไขสำหรับการวิเคราะห์ความเสถียรของจุดสมดุลสำหรับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ตั้งแต่ 2 สมการขึ้นไป	93
บทที่ 4 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน		99
4.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทั่วไป	100
4.1.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของพลศาสตร์ของน้ำตาลกลูโคสและฮอร์โมนอินซูลิน	100

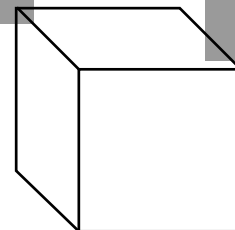
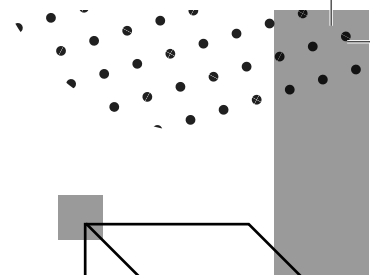
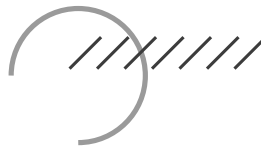
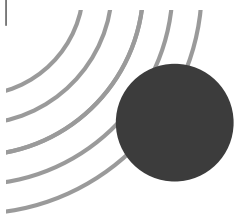
4.1.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของกลไกการให้ยารักษาโดยการแพร่เข้าสู่หลอดเลือดอย่างต่อเนื่อง (delivery of drugs by continuous infusion)	102
4.1.3	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยการแบ่งเป็นส่วน ๆ (compartmental model)	104
4.1.4	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของกลไกการดูดซึมสารอาหารเข้าสู่เซลล์ของแบคทีเรีย	106
4.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์ของประชากร	112
4.2.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับประชากรชนิดเดียว (single-species population models)	112
4.2.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้ล่า-เหยื่อ	118
4.2.3	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโรคติดต่อ	130

บทที่ 5 ตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในงานวิจัย 143

5.1	ตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโรคเบาหวาน	143
5.2	ตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในรูปแบบของสมการ Lotka-Volterra	148
5.2.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้ล่า-เหยื่อของสัตว์	148
5.2.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ของสารอาหาร แพลงตอนพืชและแพลงตอนสัตว์	153
5.2.3	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการประมง	156
5.3	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโรคติดต่อ	159
5.3.1	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โรคติดต่อที่เกิดขึ้นในมนุษย์	159
5.3.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โรคติดต่อที่เกิดขึ้นในสัตว์	168
5.3.3	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โรคติดต่อที่เกิดขึ้นในพืช	173
5.3.4	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โรคติดต่ออื่น ๆ	178

เฉลยแบบฝึกหัด 183

ภาคผนวก	193
บรรณานุกรม	209
ดรรชนี	215



บทที่ 1

บทนำเกี่ยวกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คืออะไร

ในโลกแห่งความเป็นจริง เรามีปัญหามากมายที่จะต้องแก้ไขหรือดำเนินการหาทางจัดการแก้ไข ซึ่งปัญหาบางปัญหามีความเสี่ยงทั้งด้านการเงินที่จะต้องลงทุน ใช้เงินสูงในการแก้ปัญหาหรือบางปัญหาอาจจะส่งผลกระทบต่อชีวิตและทรัพย์สินของมนุษย์เป็นจำนวนมาก เช่น การทำนายผลการเลือกตั้ง การทำนายแนวโน้มราคาน้ำมัน การทำนายรูปแบบการเจริญเติบโตและการขยายตัวของป่า การทำนายการระบาดของโรคระบาดต่าง ๆ ดังนั้น จึงต้องอาศัยตัวแบบ (model) ซึ่งคือตัวแทนวัตถุ ระบบ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือตัวแทนองค์ประกอบต่าง ๆ ของระบบที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อศึกษาการทำงานของระบบงานหรือปัญหาจริง ตัวแบบข้างต้นสามารถนำไปทำงานได้หลายรูปแบบ เช่น เป็นเครื่องมือสำหรับทำนายหรือคาดคะเนผลต่าง ๆ ที่ต้องการศึกษา หรือเป็นเครื่องมือสำหรับช่วยทดสอบประสิทธิภาพของเครื่องจักรหรืออุปกรณ์ใด ๆ เป็นต้น ซึ่งตัวแบบอาจช่วยหาคำตอบที่แท้จริงได้หรืออาจจะหาได้แค่ค่าโดยประมาณ ตัวแบบมีหลายประเภทตามคุณลักษณะ เช่น ตัวแบบทางกายภาพ ตัวแบบแอนะล็อก ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตัวแบบทางสถิติ และตัวแบบเชิงคอมพิวเตอร์ ซึ่งในหนังสือเล่มนี้จะอธิบายถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) เท่านั้น



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

ปัญหาหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นอาจเกี่ยวข้องหรือไม่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ แต่วิธีการแก้ปัญหาโดยอาศัยคณิตศาสตร์ก็สามารถมีบทบาทสำคัญในการได้มาซึ่งคำตอบเบื้องต้นที่อาจจะนำไปสู่คำตอบที่ตอบโจทย์โลกแห่งความเป็นจริงได้ สำหรับการแก้ปัญหาโดยใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์นั้น เรามักจะออกแบบและสร้างสิ่งที่เรียกว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

บทนิยาม 1.1

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หรือ **mathematical model** คือตัวแทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องการหาคำตอบซึ่งเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจสถานการณ์หรือปัญหานั้น ๆ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพมากขึ้น และเพื่อทำนายพฤติกรรมหรือกลไกทางพลศาสตร์ของสถานการณ์นั้น ๆ มากขึ้น

หลังจากที่ได้ตัวแบบมากก็จะทำการศึกษาความสัมพันธ์ วิเคราะห์ และใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาเหล่านั้น ๆ เพื่อใช้คำตอบที่ได้มาเป็นตัวแทนคำตอบในการตอบปัญหาสถานการณ์จริง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น สาขาทางวิทยาศาสตร์ ทุกสาขา ทางวิศวกรรม ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ จิตวิทยา วิทยาการคอมพิวเตอร์ การแพทย์ เป็นต้น นอกจากนี้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีระดับความยาก-ง่ายที่ต่างกัน ซึ่งมีตั้งแต่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีตัวแปรเดียว ฟังก์ชันเดียว ไปจนถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีหลายตัวแปรและมีฟังก์ชันนับพัน โดยองค์ประกอบของตัวแบบจะประกอบไปด้วย

- ตัวแปร (variable) ซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรอื่น ๆ
- ตัวแปรเสริม (parameter) หรือพารามิเตอร์ เป็นตัวแปรที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือเป็นค่าคงที่
- รูปแบบฟังก์ชันต่าง ๆ (relational function) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและตัวแปรเสริม
- ข้อจำกัด (constraint) คือ ข้อจำกัดของค่าตัวแปรต่าง ๆ



บทที่ 2

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับ สมการเชิงอนุพันธ์

ในบทที่ 2 นี้จะอธิบายการนำสมการเชิงอนุพันธ์ไปใช้เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน โดยจะแบ่งออกเป็น 2 หัวข้อใหญ่ ได้แก่ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

2.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ในหัวข้อย่อยนี้ จะได้ศึกษาถึงการนำสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาใช้เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับศึกษาการเจริญเติบโตของประชากรของสิ่งมีชีวิต การย่อยสลายของสารกัมมันตรังสี การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของอุณหภูมิของวัตถุต่าง ๆ การผสมสารหรือของเหลว ปฏิกริยาทางเคมี



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

และการระบายของเหลวผ่านทางรูในแท่งก้นน้ำ โดยเนื้อหาในส่วนนี้จะครอบคลุมสำหรับทั้งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เชิงเส้น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไม่เชิงเส้น และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์

2.1.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เชิงเส้น (linear models)

การเจริญเติบโตและการย่อยสลาย (growth and decay)

มีสถานการณ์ในชีวิตประจำวันเป็นจำนวนมากที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของบางจำนวน x เป็นสัดส่วนกับปริมาณของจำนวนนั้น นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \text{สำหรับค่าคงที่ } k \text{ ใด ๆ}$$

โดยผลเฉลยทั่วไปคือ $x = Ae^{kt}$

ตัวอย่างสถานการณ์ เช่น

1. ธาตุเรเดียม (radium) ย่อยสลายเปลี่ยนไปเป็นธาตุยูเรเนียม (uranium)

ถ้า $x(t)$ แทนปริมาณของธาตุเรเดียม ณ เวลา t ใด ๆ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของธาตุเรเดียมสามารถเขียนได้เป็น $\frac{dx}{dt} = kx$ ซึ่งในกรณีนี้ $k < 0$

2. ดอกเบี้ยเงินฝากในธนาคาร (bank interest)

ปริมาณของดอกเบี้ยเงินฝากที่จะได้รับเป็นสัดส่วนโดยตรงกับเงินฝากที่มีอยู่ ณ ขณะนั้น ๆ ในกรณีนี้ $k > 0$ โดยจะได้ผลเฉลยออกมาเป็น

$$x(t) = x_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nt}$$



บทที่ 3

องค์ประกอบสำหรับการวิเคราะห์ตัวแบบ เชิงคณิตศาสตร์

ในบทนี้จะกล่าวถึงองค์ประกอบต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นสมการหรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จะเป็นตัวแบบไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนในการวิเคราะห์ ดังนั้นเป้าหมายของบทนี้คือจะพยายามทำให้ตัวแบบไม่เชิงเส้นอยู่ในรูปที่เป็นเชิงเส้นมากขึ้น เพื่อให้ทำการวิเคราะห์ได้ง่ายขึ้น โดยการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในบทนี้นั้นจะเริ่มจากการหาจุดสมดุลของตัวแบบหรือระบบสมการ การทำตัวแบบให้เป็นเชิงเส้นมากขึ้น ความเสถียรในรูปแบบต่าง ๆ และการตรวจสอบดูว่าจุดสมดุลของตัวแบบหรือระบบสมการมีความเสถียรแบบใด

3.1 การหาจุดสมดุล (Equilibrium Points or Steady States)

จุดสมดุลหรือภาวะสมดุลคือสถานะของระบบใด ๆ ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือค่าของตัวแปรในสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์คงที่และจะคงที่แบบนั้นตลอดไป การหาจุดสมดุลนี้สามารถหาได้จากการกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวมาเท่ากับ 0



พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dx}{dt} = F(X) \quad (3.1.1)$$

โดยที่ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ และ $(F_1, F_2, \dots, F_n)^T$

เนื่องจากตัวแปรในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ณ จุดสมดุล ซึ่งในที่นี้จะแทนด้วย \bar{X} เราสามารถวิเคราะห์หาจุดสมดุลทั้งหมดได้จาก

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0 = F(\bar{X}) \quad (3.1.2)$$

รากของสมการ (3.1.2) คือจุดสมดุลในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ จะมีจุดสมดุล 1 จุดหรือมากกว่า 1 จุด หรืออาจจะไม่มีจุดสมดุลก็ได้

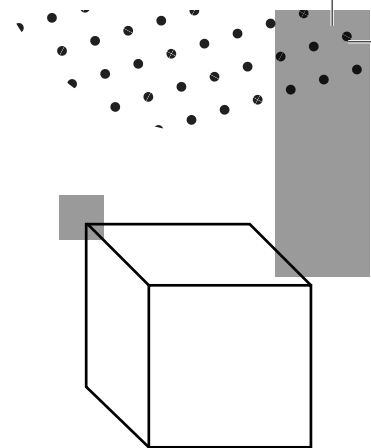
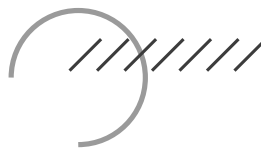
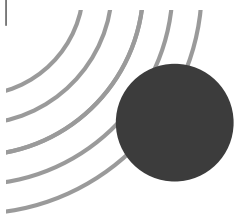
ตัวอย่าง 3.1

กำหนดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = x - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = xy - y$$

จงหาจุดสมดุลของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น



บทที่ 4



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับ สถานการณ์ในชีวิตประจำวัน

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อย่างง่ายที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ สำหรับอันดับหนึ่ง อันดับสอง และระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งไปแล้ว โดยตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในบทที่ 2 นั้น เราสามารถวิเคราะห์หาผลเฉลยเชิงปริมาตรได้ สำหรับในบทนี้เราจะได้ศึกษาตัวอย่างของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนมากขึ้น และบางตัวแบบเราจะต้องอาศัยการวิเคราะห์โดยใช้องค์ประกอบต่าง ๆ ในบทที่ 3 มาหาผลเฉลยเชิงคุณภาพ โดยในบทนี้จะเน้นศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แบบต่อเนื่อง (continuous model) เพราะเป็นตัวแบบที่พบบ่อยในชีวิตประจำวัน สำหรับเนื้อหาในบทที่ 4 นี้ก็จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทั่วไป และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์ของประชากร

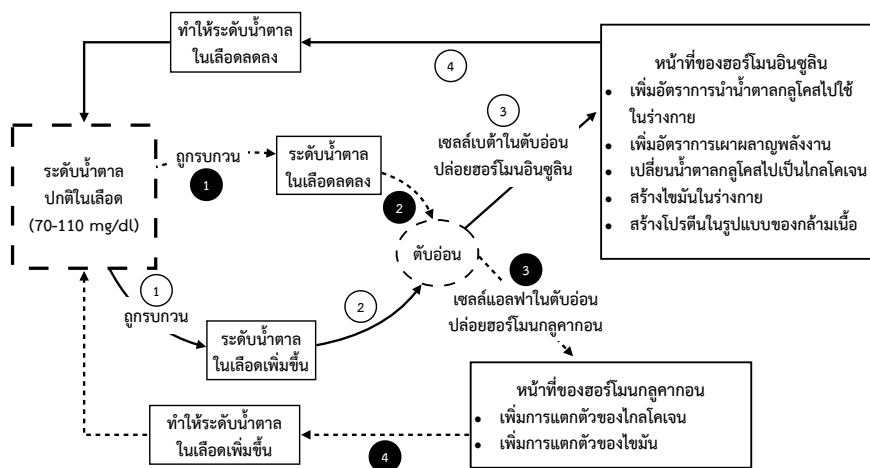
4.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทั่วไป

4.1.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของพลศาสตร์ของน้ำตาลกลูโคสและฮอร์โมนอินซูลิน

เราสามารถสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับศึกษาการทำงานของน้ำตาลกลูโคสและฮอร์โมนอินซูลิน ซึ่งจะนำไปสู่ความเข้าใจที่ดีขึ้นของโรคเบาหวาน (diabetes mellitus) ได้ โรคเบาหวานแบ่งออกเป็น 2 ชนิด ได้แก่

1. **ชนิดที่ 1** เกิดจากการที่ β -cell ในตับอ่อนที่ผลิตฮอร์โมนอินซูลินถูกทำลาย มักเกิดในผู้เยาว์ สามารถรักษาได้โดยการฉีดฮอร์โมนอินซูลินเพื่อควบคุมระดับน้ำตาลในเลือดประจำวัน

2. **ชนิดที่ 2** เกิดจากการบกพร่องของการตอบสนองของฮอร์โมนอินซูลิน เซลล์ของผู้ป่วยยังคงมีการสร้างฮอร์โมนอินซูลิน แต่ทำงานไม่เป็นปกติ เนื่องจากมีภาวะดื้อต่อฮอร์โมนอินซูลิน ทำให้เซลล์ที่สร้างฮอร์โมนอินซูลินถูกทำลายไป เบาหวานชนิดนี้พบเห็นเป็นส่วนใหญ่ และยังไม่มีการรักษาที่แน่ชัด



ภาพ 4.1 กลไกการทำงานของน้ำตาลกลูโคส-ฮอร์โมนอินซูลิน-ฮอร์โมนกลูคาгон



เฉลยแบบฝึกหัด

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2

แบบฝึกหัดที่ 2.11

1. 760 คน
2. 11 ชั่วโมง
3. ≈ 261 มิลลิกรัม และ ≈ 41 วัน
4. ≈ 48 มิลลิกรัม และ $\approx 32,339$ ปี
5. 2.84×10^{-12} กิโลกรัม
6. 15,600 ปี
7. 13.3 นาที และ $18^{\circ}C$
8. $T(1) = 36.67^{\circ}F$ และใช้เวลา ≈ 3.06 นาที
9. ≈ 81.1 ปอนด์
10. 64.38 ปอนด์

ภาคผนวก

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์และการหาผลเฉลย

ในหัวข้อนี้จะพูดถึงความรู้พื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

คำศัพท์เฉพาะทาง

อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน $y = f(t)$ สามารถเขียนได้ในรูป $\frac{dy}{dt}, y', \dot{y}$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ n สามารถเขียนได้ในรูป $\frac{d^n y}{dt^n}, y^{(n)}$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations: ODEs) คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ซึ่งมีตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว เช่น

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

อันดับ (order) คือ ดีกรีที่สูงที่สุดของอนุพันธ์ ในที่นี้ คือ n

เช่น



ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง (First - order) $\Rightarrow \frac{dx}{dt} - kx = 0$ นั่นคือ $\frac{dx}{dt} = kx$
- สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง (Second - order) $\Rightarrow a \frac{dx^2}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ ฟังก์ชัน $y = f(t)$ ที่สอดคล้องกับสมการสำหรับทุกตัวแปรอิสระ (t) พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = g(t)$$

สมการดังกล่าวข้างต้น เรียกว่า **สมการเอกพันธ์ (homogeneous)** เมื่อ $g(t) = 0$

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่ไม่เอกพันธ์และไม่เชิงเส้น

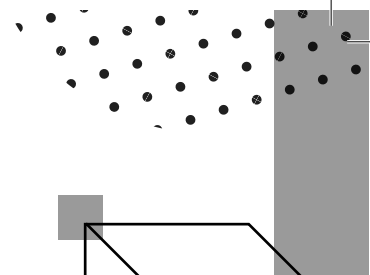
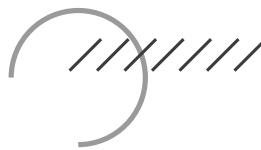
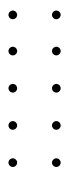
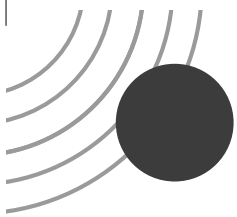
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5x \frac{dx}{dt} + x^3 = \cos t$$

ตัวแปรอิสระ คือ t และฟังก์ชันไม่ทราบค่า คือ $x(t)$

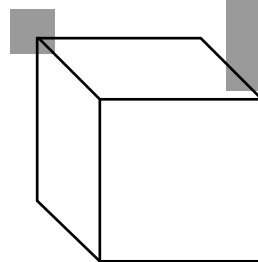
2. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ที่เชิงเส้น และเอกพันธ์ที่ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นค่าคงตัว

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 4t \frac{dx}{dt} + t^3 x = 0$$

ตัวแปรอิสระ คือ t และฟังก์ชันไม่ทราบค่า คือ $x(t)$



ดรรชนี



basic reproduction number, 136

COVID-19, 159, 165, 166, 168

disease-free equilibrium point (DFE),
134

endemic equilibrium point (EE), 134

infected, 130

Lotka-Volterra, 45, 148, 153, 154

minimal model, 145, 147

neutral center, 83, 84, 86, 121, 149,
151, 153

nullcline, 71

phase plane, 67

phase portrait, 67

recovered, 130

saddle point, 82, 86, 120, 124, 149

stable node, 82, 86, 124

stable spiral, 83, 86, 125, 152, 153

structurally unstable, 84

susceptible, 130

unstable node, 81, 86

unstable spiral, 83, 86

กฎการเย็นตัวหรือร้อนขึ้น (Newton's law
of cooling/warming), 22

กฎของฮุค (Hooke's law), 52, 53

กฎอัตรา (law of mass action), 36, 107

กฎเกณฑ์ของ Routh-Hurwitz
(Routh-Hurwitz criteria), 95, 96

กวัดแกว่ง (oscillation), 84, 121, 170, 202

การทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization), 63

การประมง (fishery), 36, 148, 156, 158,
159

การรักษา (treatment), 102, 104,
163–165



ฟังก์ชันเมทริกซ์วงนัยทั่วไป

ผู้แต่ง : รศ. ดร. กิจติ รอดเทศ

ฟังก์ชันเมทริกซ์วงนัยทั่วไปเป็นฟังก์ชันค่าจำนวนเชิงซ้อนบนปริภูมิเมทริกซ์จัตุรัส (ภาคขยายของฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์) ซึ่งถูกนิยามไว้ในปีคริสต์ศักราช 1918 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียนามว่า อีสไซ ซูร์ หลังจากนั้นฟังก์ชันนี้ได้ถูกศึกษาอย่างกว้างขวางทั้งทางทฤษฎีและทางการประยุกต์ หนังสือเล่มนี้ มุ่งเน้นอธิบายถึงสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเมทริกซ์วงนัยทั่วไป โดยแสดงให้เห็นถึงเทคนิคการพิสูจน์ที่น่าสนใจ รวมถึงการนำเสนอสมบัติที่นำไปประยุกต์ใช้ในพีชคณิตเชิงหลายเส้น ทฤษฎีเมทริกซ์ ทฤษฎีการไม่แปรผัน และทฤษฎีกราฟ อีกทั้งได้เสนอข้อความ คาดการณ์ และปัญหาปลายเปิดที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมทริกซ์วงนัยทั่วไปไว้อย่างหลากหลาย เพื่อให้ผู้อ่านนำไปวิจัยต่อยอดต่อไป

หนังสือแนะนำ



การบริหารและการจัดการศึกษาสู่การพัฒนาที่ยั่งยืน

ผู้แต่ง :

รศ. ดร.ธีรศักดิ์ อุปรมัย อุปไมยอริชัย
ผศ. ดร.สุชาติ บางวิเศษ

การบริหารและการจัดการศึกษาสู่การพัฒนาที่ยั่งยืน เป็นจุดเริ่มต้นและเป็นรากฐานสำคัญในการพัฒนาประเทศชาติ อันเกิดจากการหล่อหลอมให้รักในการศึกษา รักในความรู้ รักชาติ รักศาสนา และรักพระมหากษัตริย์ สร้างวัฒนธรรมอันดีงาม ในความเป็นประเทศไทย ครูและบุคลากรทางการศึกษาทุกท่าน ต้องศึกษาและเรียนรู้พร้อมนโยบายจากรัฐบาลสู่การพัฒนาให้เกิดประสิทธิผลในตัวผู้เรียนให้มากที่สุด โดยยึดหลักการทฤษฎีสู่แนวทางในการปฏิบัติที่เป็นรูปธรรมสามารถกระทำได้จริงเกิดผลลัพธ์ตามดัชนีตัวบ่งชี้และส่งถึงผลกระทบต่อมาตรฐาน การศึกษาของชาติ ทั้งนี้ต้องคำนึงถึงความหลากหลายใน วัฒนธรรมเชิงพื้นที่และบริบทที่มีความแตกต่างทางเชื้อชาติ การกำเนิดและการเปลี่ยนแปลงภายใต้เศรษฐกิจฐานความรู้ สู่การพัฒนาที่ยั่งยืนและความเป็นพลเมืองที่ดีต่อการพัฒนา ประเทศชาติสืบไป

คณิตศาสตร์ประกันชีวิตเบื้องต้น

ผู้แต่ง : ผศ. ดร.ชัยรัตน์ มदनาก



คณิตศาสตร์และสถิติเป็นหัวใจหลักของอุตสาหกรรมประกันภัย การทำประกันเป็น ข้อตกลงระหว่าง “ผู้เอาประกัน” กับ “ผู้ให้ประกัน” โดยมี “กรมธรรม์” เป็นพันธสัญญาที่ระบุว่าผู้เอาประกันต้องจ่ายเบี้ยประกันเท่าใด และจะได้รับผลประโยชน์ใดบ้าง ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ ที่ระบุจะไม่สามารถแก้ไขได้หลังจากเซ็นสัญญาร่วมกันแล้ว สิ่งสำคัญที่สุดในกรมธรรม์ คือ เบี้ยประกันเรียกเก็บและเงินผลประโยชน์ ซึ่งจะต้องมีการคำนวณ อย่างเป็นรอบคอบโดยใช้หลักสถิติ และคณิตศาสตร์ที่สำคัญหนังสือเล่มนี้ รวบรวมหลักคณิตศาสตร์และสถิติพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอด องค์ความรู้ให้กับผู้อ่าน โดยหลักประกันภัยในการประกัน ชีวิตเพียงอย่างเดียว



☎ 0 5596 8833-8836

📍 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

✉ nuph@nu.ac.th



ทฤษฎีสถานามควอนตัม Quantum Field Theory

ผู้แต่ง: ผศ. ดร.พิเชฐ วณิชชาพงศ์เจริญ

ทฤษฎีสถานามควอนตัม คือ กรอบของทฤษฎีที่อธิบายสนามที่มีสมบัติทางควอนตัม โดยที่สนามคือฟังก์ชันของตำแหน่งในกาลอวกาศ หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่ออธิบายหลักการ แนวคิด และการคำนวณในทฤษฎีสถานามควอนตัม โดยเน้นอธิบายประเด็นของการนำทฤษฎีสถานามควอนตัมไปอธิบายหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์อนุภาค โดยมีประเด็นหลัก ได้แก่ ความรู้เบื้องต้นที่เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาทฤษฎีสถานามควอนตัม การวิเคราะห์สนามอิสระ การวิเคราะห์ทฤษฎีสถานามสเกลาร์ที่มีอันตรกิริยาในตัว การวิเคราะห์พลศาสตร์ไฟฟ้าเชิงควอนตัมรวมทั้งตัวอย่างทิศทางการพัฒนาของเนื้อหาที่นอกเหนือจากที่อธิบายในส่วนหลัก หนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับผู้สอนระดับบัณฑิตศึกษา หรือการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เนื่องจากอธิบายแนวคิดการวิเคราะห์ และวิธีการคำนวณโดยละเอียด รวมทั้ง มีการวิจารณ์ประเด็นที่สำคัญและสรุปท้ายบท เพื่อให้ผู้อ่านตรวจสอบความเข้าใจ และทราบความเชื่อมโยงเบื้องต้นกับเนื้อหาอื่น นอกจากนี้ หนังสือเล่มนี้ยังมีโจทย์ปัญหาและเฉลย เพื่อให้ผู้อ่านได้เสริมความเข้าใจในเนื้อหา



วิจัยเชิงปฏิบัติการ แก้ไขปัญหา สาธารณสุขในชุมชน

ผู้แต่ง: ผศ. ดร.จักรพันธ์ เพ็ชรภูมิ

เมื่อผู้ป่วยมาปรึกษาแพทย์ด้วยอาการต่าง ๆ แพทย์จะต้องซักถามประวัติอาการเจ็บป่วยและตรวจร่างกายผู้ป่วย ซึ่งถือเป็นทักษะที่สำคัญมากและต้องฝึกฝนอย่างสม่ำเสมอ การที่แพทย์จะทราบประวัติอาการเจ็บป่วยและความผิดปกติจากการตรวจร่างกายอย่างครบถ้วนและถูกต้องได้นั้น นอกจากจะต้องมีความรู้ทางวิชาแพทย์แล้ว ยังต้องมีความรู้ความสามารถในการสื่อสารและมีสัมพันธภาพที่ดีกับผู้ป่วย ข้อมูลที่ถูกต้องจะนำไปสู่การดูแลรักษาที่ถูกต้องด้วย การซักถามประวัติ การเจ็บป่วยและการตรวจร่างกายจึงถือเป็นศิลปะอย่างหนึ่งที่ช่วยนำไปสู่การรักษาผู้ป่วยให้หายจากโรคร้ายไข้เจ็บ อันเป็นจุดมุ่งหมายสูงสุดของแพทย์ทุกคน



ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ : จากแนวคิดทฤษฎีสู่การปฏิบัติ

ผู้แต่ง : ผศ. ดร.ชำนาญ ปาลมวงษ์

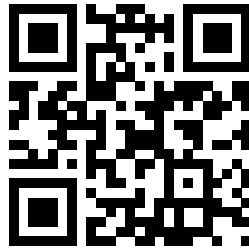
“งานวิจัยมีหลายประเภท แต่ละประเภทมีขั้นตอน กระบวนการและการให้คำตอบที่แตกต่างกัน งานวิจัยที่เป็นเชิงคุณภาพ ก็เป็นประเภทหนึ่ง ที่มีขั้นตอน กระบวนการ และการให้คำตอบที่นำไปใช้ประโยชน์ได้ในรูปแบบของการอธิบาย ให้รู้ถึงภูมิหลังที่มา สภาพปัจจุบัน และอนาคต ได้เป็นอย่างดี หนังสือเล่มนี้ได้กล่าวถึง ขั้นตอน กระบวนการในการได้มาซึ่งคำตอบของงานวิจัย เชิงคุณภาพอย่างละเอียด ตามประสบการณ์ที่ผู้เขียนได้รวบรวมมา”



สำนักพิมพ์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

สั่งซื้อหนังสือออนไลน์

จัดส่งถึงบ้านสะดวกรวดเร็ว



สั่งซื้อทันที

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่
ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

✉ nuph@nu.ac.th 📘 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
☎ 0 5596 8833-8836 🌐 nu_publishing



NUPH
online store

www.nupress.grad.nu.ac.th