th ANNIVERSARY
NARESUAN UNIVERSITY

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

GENERALIZED MATRIX FUNCTIONS

กิจติ รอดเทศ

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House
www.nupress.grad.nu.ac.th

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

กิจติ รอดเทศ.

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป = Generalized Matrix Functions.--พิษณุโลก: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2564.
214 หน้า.
1. เมทริกซ์. I.ชื่อเรื่อง.

512.9434
ISBN 978-616-426-214-0
ISBN (e-book) 978-616-426-215-7
สพน. 89
ราคา **300** บาท
พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม พ.ศ. 2564

ผู้จัดพิมพ์ สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

มีวางจำหน่ายที่ 1. **ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**
สาขา ศาลาพระเกี้ยว กรุงเทพฯ โทร. 0 2218 7000-3
สยามสแควร์ อาคารวิทยกิตติ์ กรุงเทพฯ โทร. 0 2218 9881, 0 2255 4433
มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก โทร. 0 5526 0162-5
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา โทร. 0 4421 6131-2
มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี โทร. 0 3839 4855-9
โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า (รร.จปร.) จังหวัดนครนายก โทร. 0 3739 3023, 0 3739 3036
จัตุรัสจามจุรี กรุงเทพฯ โทร. 0 2160 5301
มหาวิทยาลัยพะเยา โทร. 0 5446 6799, 0 5446 6800
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน โทร. 0 4492 2662-3
สาขาย่อยคณะครุศาสตร์จุฬาฯ โทร. 0 2218 3979
สาขาหัวหมาก โทร. 0 2374 1378

2. **ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์** อาคารวิทยบริการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 50 ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0 2579 0113
3. **ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์** อาคารอเนกประสงค์ ชั้น 1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0 2613 3899, 0 2623 6493
สาขา ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ โทร. 0 5394 4990-1
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ จังหวัดสงขลา โทร. 0 7428 2980, 0 7428 2981
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา จังหวัดยะลา โทร. 0 7329 9980
4. **สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร** บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารมหาธรรมราชา จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833-8836

กองบรรณาธิการ กองบรรณาธิการจัดทำเอกสารสิ่งพิมพ์ทางวิชาการของสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
ออกแบบปก สัญญา จันทา
ออกแบบรูปเล่ม สรญา แสงเย็นพันธ์
พิมพ์ที่ บริษัท กู๊ดเฮด พริ้นท์ติ้ง แอนด์ แพคเกจจิ้ง กรุ๊ป จำกัด 6/1 นิคมอุตสาหกรรมบางชัน ซอยเสรีไทย 58 แขวงมีนบุรี เขตมีนบุรี กรุงเทพฯ 10510

pubat
สำนักพิมพ์นี้เป็นสมาชิกสมาคมผู้จัดพิมพ์และผู้จำหน่ายหนังสือแห่งประเทศไทย
http://www.thaibooksociety.com

Green Read
พิมพ์บน กระดาษคุณภาพ เพื่อผลงานคุณภาพ
กระดาษถนอมสายตากรีนรี้ด

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่ ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

nuph@nu.ac.th
สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
0 5596 8833-8836
nu_publishing

คำนำ

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป เป็นฟังก์ชันที่ขยายแนวคิดมาจากฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ ซึ่งนิยามไว้โดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย อิสไซ ชูร์ ในปีคริสต์ศักราช 1918 ในขณะที่ศึกษาทฤษฎีตัวแทนของกรุป ซึ่งนิยามฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป $d_\chi^G : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ที่สัมพัทธ์กับกรุปย่อย G ของกรุปสมมาตร S_n และคาแรกเตอร์ χ ของกรุป G ไว้โดย

$$d_\chi^G(A) := \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

สำหรับแต่ละเมทริกซ์จัตุรัส $A = (a_{ij})$ ขนาด $n \times n$ โดยมีสมาชิกอยู่ในสนามจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ซึ่งเมื่อ $G = S_n$ และ $\chi = \epsilon = \operatorname{sgn}$ ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป $d_\epsilon^{S_n}$ คือฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

เมื่อ $G = S_n$ และ $\chi = 1$ ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป $d_1^{S_n}$ คือฟังก์ชันเพอมาเนนต์

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in G} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

และเมื่อ $G = \{e\}$ และ $\chi = 1$ ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป $d_1^{\{e\}}$ คือฟังก์ชันอาดามาร์

$$h(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

นอกจากนั้น ชูร์ยังได้ขยายอสมการเมทริกซ์อันโด่งดังของอาดามาร์ ไปสู่อสมการในรูปของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป อันเป็นจุดเริ่มต้นของอสมการเมทริกซ์อันหลากหลาย กระทั่งนำมาสู่ข้อความคาดการณ์การครอบงำของฟังก์ชันเพอมาเนนต์ในปีคริสต์ศักราช 1966 ซึ่งเป็นปัญหาที่ท้าทายสำหรับนักคณิตศาสตร์มากว่าห้าทศวรรษ และยังคงเป็นปัญหาเปิดมาจวบจนปัจจุบัน

นอกเหนือจากบทประยุกต์โดยตรงที่ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปมีต่อทฤษฎีเมทริกซ์แล้ว ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปยังมีบทประยุกต์ที่หลากหลายในพีชคณิตเชิงหลายเส้นโดยเฉพาะอย่างยิ่งในหัวข้อคลาสเทนเซอร์สมมาตร มีบทประยุกต์ต่อการจำแนกกราฟในทฤษฎีกราฟ และมีบทประยุกต์ต่อทฤษฎีการไม่แปรผันบนปริภูมิพหุนามหลายตัวแปร

หนังสือเล่มนี้เรียบเรียงขึ้นโดยมีจุดมุ่งเน้นอธิบายสมบัติ การประยุกต์ใช้ และหัวข้องานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป โดยจะนำเสนอกระบวนการคิดและเทคนิคในการพิสูจน์ แรงจูงใจ และความสัมพันธ์ของแต่ละหัวข้อ โดยจะแบ่งออกเป็น 7 บทประกอบด้วย บทที่ 1 เป็นบทความรู้พื้นฐานโดยจะนำเสนอ คำจำกัดความ สัญลักษณ์ สมบัติต่าง ๆ ที่จะนำไปใช้ในหนังสือเล่มนี้ ในรูปแบบพรรณาเชื่อมโยงกัน โดยแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อ คือ พีชคณิตเชิงเส้น ปริภูมิผลคูณภายใน และทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัด ซึ่งจะละการพิสูจน์ทฤษฎีมาตรฐาน สัญลักษณ์ และคำจำกัดความที่เป็นพื้นฐานภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ผู้อ่านเคยศึกษา พีชคณิต และพีชคณิตเชิงเส้น ในระดับปริญญาตรีมาแล้วเป็นอย่างดี

เนื่องจากสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปมีผลมาจากสมบัติของคลาสเทนเซอร์สมมาตร ซึ่งเหนี่ยวนำมาจากฟังก์ชันเทนเซอร์อันเป็นฟังก์ชันเชิงหลายเส้นประเภทหนึ่ง และเพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมสำหรับองค์ความรู้พื้นฐาน ในบทที่ 2 จึงเป็นการศึกษาฟังก์ชันเชิงหลายเส้น และฟังก์ชันเทนเซอร์ โดยเน้นศึกษาคุณสมบัติที่จำเป็นสำหรับการศึกษาคลาสเทนเซอร์สมมาตร ในบทที่ 3 จะให้บทนิยามและตัวอย่างของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป รวมถึงศึกษาสมบัติของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่เทียบเคียงกับสมบัติของฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ โดยใช้เพียงพื้นฐานใน พีชคณิต พีชคณิตเชิงเส้น และทฤษฎีตัวแทนของ กรุปจำกัด กอปรกับเทคนิคที่หลากหลายในการพิสูจน์สมบัติเหล่านั้น บทที่ 4 จะศึกษาความหมายของคลาสเทนเซอร์สมมาตรซึ่งเป็นปริภูมิย่อยหนึ่งของปริภูมิผลคูณเทนเซอร์ โดยจะเน้นศึกษาผลคูณภายในเหนี่ยวนำ ฐานอันดับเชิงตั้งฉากปรกติของคลาสเทนเซอร์สมมาตร และตัวดำเนินการเหนี่ยวนำบนคลาสเทนเซอร์สมมาตร อันจะก่อให้เกิดความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป ซึ่งจะถูกทำให้เด่นชัดมากยิ่งขึ้นในบทที่ 5 ซึ่งในบทที่ 5 จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างเทนเซอร์สมมาตรกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปในการค้นหาสมบัติของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป อันประกอบไปด้วย อสมการของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปบนเซตของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน การพิสูจน์อสมการของชูร์ สูตรวางนัยทั่วไปสำหรับทฤษฎีของโคชี – ไบเนต การพิสูจน์การกระจายของลาปลาซสำหรับฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์และฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์ รวมถึงศึกษาสมบัติของปริภูมิกราสส์มันน์และปริภูมิสมมาตรบริบูรณ์อีกด้วย

ในบทที่ 6 จะเป็นการศึกษาผลย้อนกลับของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่มีต่อคลาสเทนเซอร์สมมาตร นั่นคือจะใช้ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปในการศึกษาคุณลักษณะต่าง ๆ ของคลาสเทนเซอร์สมมาตร รวมถึงการประยุกต์ใช้เมทริกซ์เหนี่ยวนำบนปริภูมิสมมาตรบริบูรณ์ในการศึกษาทฤษฎีการไม่แปรผันของพหุนามหลายตัวแปร อันจะนำไปสู่การประยุกต์ใช้ในการจำแนกความสมสัณฐานของกราฟในทฤษฎีกราฟ และในบทสุดท้าย จะเป็นการรวบรวมหัวข้องานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป โดยเฉพาะ

อย่างยิ่งข้อความคาดการณ์การครอบงำของฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์ โดยจะอธิบายในลักษณะของการทบทวนวรรณกรรมอย่างย่อ เพื่อให้เห็นถึงประวัติความเป็นมา ผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องกับข้อคาดการณ์นี้ รวมถึงสถานะปัจจุบัน นอกจากนั้น คำถามและหัวข้องานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาตัวคงสภาพเชิงเส้นได้ถูกรวบรวมไว้อย่างหลากหลายเพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นแนวทาง แนวโน้ม สำหรับหัวข้องานวิจัยที่เกี่ยวกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

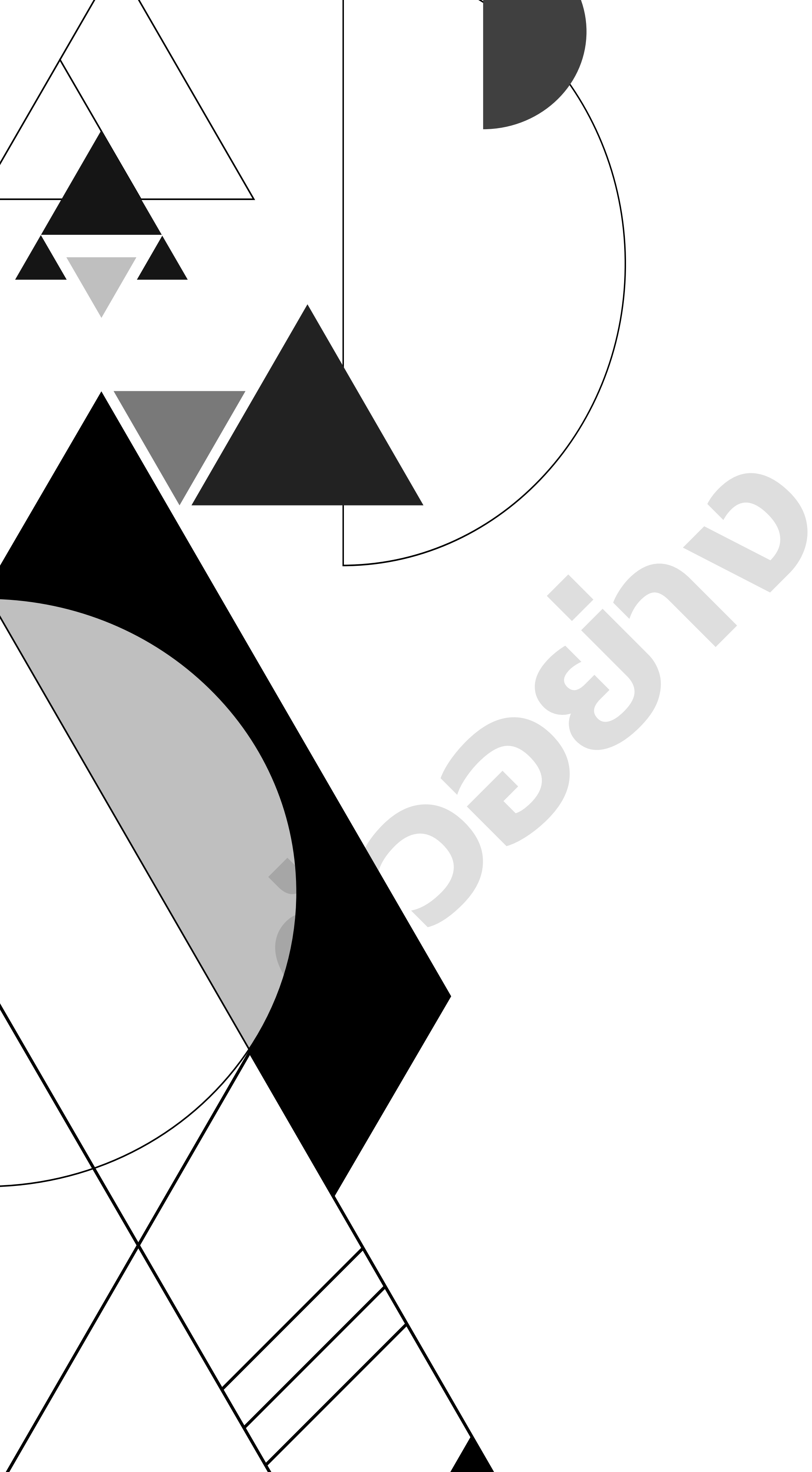
นอกจากนี้ ผู้เขียนได้รวมรวมแบบฝึกหัดในแต่ละหัวข้อเท่าที่จำเป็นและเพียงพอเพื่อให้ผู้อ่านได้ทบทวนทำความเข้าใจ เพื่อเตรียมพร้อมในการศึกษาหัวข้อต่อไป โดยการอธิบายเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้จะเรียงตามลำดับต่อเนื่องกันไปจากบทที่ 1 ถึงบทที่ 7 และจะใช้ศัพท์บัญญัติของราชบัณฑิตยสถานมากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

ผู้เขียนขอน้อมรำลึกถึงพระคุณครูบาอาจารย์ในทุกระดับชั้นที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ทำให้ผู้เขียนมีแนวทางการสอน การทำวิจัย การครองชีวิต รวมถึงการเขียนหนังสือเล่มนี้ ข้อผิดพลาดประการใดอันเกิดจากเอกสารนี้ ผู้เขียนขอน้อมรับเพื่อนำมาพิจารณาปรับปรุงในโอกาสต่อไป

กิจติ รอดเทศ

9 กรกฎาคม 2563

ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยนเรศวร



สารบัญ

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้จะเป็นการรวบรวมสัญลักษณ์ ความหมาย บทนิยาม คุณสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับหนังสือเล่มนี้ โดยจะละการพิสูจน์สมบัติ หรือทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เป็นมาตรฐานไว้ ซึ่งผู้อ่านสามารถศึกษาบทพิสูจน์ทฤษฎีหรือสมบัติต่าง ๆ เหล่านั้นได้ในหนังสือพีชคณิต พีชคณิตเชิงเส้น ทฤษฎีเมทริกซ์ และทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัด ได้โดยทั่วไป

1.1 พีชคณิตเชิงเส้น

ในหนังสือเล่มนี้ ปริภูมิเวกเตอร์ หมายถึงปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด และฐานของปริภูมิเวกเตอร์หากมิได้กล่าวไว้เพิ่มเติมหมายถึงฐานอันดับ ถ้าเซตย่อย W ของปริภูมิเวกเตอร์ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนาม $\mathbb{F}$ เดียวกันด้วยแล้ว จะเรียก W ว่าเป็น**ปริภูมิย่อย (Subspace)** ของ V และจะเขียนแทนด้วย $W \leq V$ ซึ่งสำหรับเซตย่อย S ใด ๆ ของปริภูมิเวกเตอร์ V เหนือสนาม $\mathbb{F}$ จะได้ว่า

$$\mathrm{Span}(S) := \{\sum_{i=1}^{k} a_i s_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, s_i \in S; \forall i = 1, \ldots, k\}$$

เป็นปริภูมิย่อยของ V เสมอ ถ้า $W \leq V$ และ $W \neq V$ แล้วจะเรียก W ว่าเป็น**ปริภูมิย่อยแท้ (Proper subspace)** ของ V ในกรณีที่ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนามอนันต์ $\mathbb{F}$ จะได้ว่า V ไม่สามารถเขียนในรูปผลยูเนียนของปริภูมิย่อยแท้อย่างจำกัดจำนวนได้ กล่าวคือ ถ้ามีปริภูมิย่อยแท้ $V_1, \ldots, V_n$ ที่ทำให้ $V = \cup_{i=1}^{n} V_i$ เมื่อพิจารณาแต่ละเวกเตอร์ $0 \neq x \in V_1$ และเลือกเวกเตอร์ $y \in V - V_1$ จะได้ว่ามีเวกเตอร์ในรูป $x + \alpha y$ (โดยที่ $\alpha \in \mathbb{F}$) อยู่เป็นอนันต์ ซึ่งจะเห็นว่า $x + \alpha y \notin V_1$ สำหรับทุก ๆ $\alpha \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$ ดังนั้น จะมีปริภูมิย่อยแท้ V_j (ซึ่ง $j \neq 1$) ที่บรรจุเวกเตอร์ในรูป $x + \alpha y$ อยู่เป็นอนันต์ นั่นคือจะมี $\alpha_0 \neq \alpha_1 \in \mathbb{F} \backslash \{0\}$ ที่ทำให้ $x + \alpha_0 y$ และ $x + \alpha_1 y$ เป็นสมาชิกใน V_j ซึ่งจะทำให้ $y \in V_j$ และดังนั้น $x \in V_j \subseteq \cup_{i=2}^{n} V_i$ จึงได้ว่า $V_1 \subseteq \cup_{i=2}^{n} V_i$ หรือ $V = \cup_{i=2}^{n} V_i$ เมื่อดำเนินการเช่นนี้ซ้ำ ๆ จะสรุปได้ว่า $V = V_n$ ซึ่งเป็น

ข้อขัดแย้ง เนื่องจาก V_n เป็นปริภูมิย่อยแท้ของ V

สำหรับการแปลงเชิงเส้น $T : V \longrightarrow W$ จากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ W เหนือสนาม $\mathbb{F}$ เดียวกัน จะเขียน

$$\mathrm{Im}(T) := \{Tv \mid v \in V\} \subseteq W$$

แทน**ภาพ (Image)** ของ T ซึ่งเป็นปริภูมิย่อยของ W นั่นคือ $\mathrm{Im}(T) \leq W$ และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{rank}(T)$ แทน $\dim(\mathrm{Im}(T))$ และจะเขียน

$$\ker(T) := \{v \in V \mid Tv = 0\} \subseteq V$$

แทน**แก่นกลาง (Kernel)** ของ T ซึ่งเป็นปริภูมิย่อยของ V นั่นคือ $\ker(T) \leq V$ โดยจะใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{nullity}(T)$ แทน $\dim(\ker(T))$ เป็นที่ทราบกันดีว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\ker(T) = \{0\}$ และ T เป็นการแปลงเชิงเส้นแบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $\mathrm{Im}(T) = W$ ซึ่งถ้าการแปลงเชิงเส้น $T : V \longrightarrow W$ เป็นการแปลงเชิงเส้นแบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง แล้วจะเรียกการแปลงเชิงเส้น T ว่าเป็น**การแปลงสมสัณฐาน (Isomorphism)** ซึ่งสมมูลกับการที่มีการแปลงเชิงเส้น $T^{-1} : W \longrightarrow V$ ที่ทำให้ $T^{-1} \circ T = I_V$ และ $T \circ T^{-1} = I_W$ มากกว่านั้นจะกล่าวว่า V และ W **สมสัณฐาน (Isomorphic)** กัน ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $V \cong W$ ก็ต่อเมื่อ มีการแปลงเชิงเส้นสมสัณฐานจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปทั่วถึงปริภูมิเวกเตอร์ W

การนิยามการแปลงเชิงเส้นจากปริภูมิเวกเตอร์ V ไปยังปริภูมิเวกเตอร์ W เพียงพอที่จะนิยามบนฐานใดฐานหนึ่งของ V เท่านั้น กล่าวคือ ถ้า $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ เป็นของ V และ $w_1, \ldots, w_n \in W$ จะมีการแปลงเชิงเส้น $T : V \longrightarrow W$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับข้อกำหนด $T(v_i) := w_i \in W$ สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, n$ ซึ่งเรียกว่าเป็น**การขยายเชิงเส้น (Linear extension)** นอกจากนี้ ในกรณีที่ $\mathrm{rank}(T) = k$ จะสามารถขยายฐาน $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ ซึ่งเป็นฐาน ๆ หนึ่งของ $\mathrm{Im}(T) \leq W$ ไปสู่ฐาน $B := \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ สำหรับ V ที่ซึ่ง $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ เป็นฐานของ $\ker(T)$ ได้ ดังนั้น

$$\dim(V) = \mathrm{rank}(T) + \mathrm{nullity}(T)$$

สำหรับการแปลงเชิงเส้น $T : V \longrightarrow W$ ใด ๆ และจะทำให้

$$V \cong W \text{ ก็ต่อเมื่อ } \dim(V) = \dim(W)$$

ในกรณีที่ $V = W$ นั่นคือ $T : V \longrightarrow V$ เป็น**ตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear operator)** จะได้ว่า

บทที่ 2

ฟังก์ชันเชิงหลายเส้นและปริภูมิผลคูณเทนเซอร์

ฟังก์ชันเชิงหลายเส้นเป็นฟังก์ชันพื้นฐานฟังก์ชันหนึ่งในพีชคณิตเชิงเส้น ในบทนี้จะรวบรวมบทนิยาม สมบัติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเชิงหลายเส้นที่จะถูกนำไปใช้ในบทต่อ ๆ ไป รวมถึงศึกษาปริภูมิผลคูณเทนเซอร์ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญยิ่งในการศึกษาคลาสเทนเซอร์สมมาตรอันเป็นกุญแจสำคัญในการศึกษาฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

2.1 ฟังก์ชันเชิงหลายเส้น และฟังก์ชันเทนเซอร์

ฟังก์ชันเชิงหลายเส้นเป็นฟังก์ชันหลายตัวแปรที่มีความเป็นเชิงเส้นในแต่ละตัวแปร กล่าวคือ สำหรับปริภูมิเวกเตอร์ $V_1, \dots, V_m, W$ เหนือสนาม $\mathbb{F}$ เดียวกัน จะเรียกฟังก์ชัน

$$\psi : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow W$$

ว่าเป็น**ฟังก์ชันเชิงหลายเส้นอันดับ** m (m–multilinear map) หรืออย่างย่อว่า **ฟังก์ชันเชิงหลายเส้น** ถ้า

$$\psi(v_1, \dots, av_k + bv'_k, \dots, v_m) = a\psi(v_1, \dots, v_k, \dots, v_m) + b\psi(v_1, \dots, v'_k, \dots, v_m)$$

สำหรับแต่ละ $k = 1, \dots, m$ โดยที่ $v_i \in V_i$ และ $a, b \in \mathbb{C}$ ในกรณีที่ $m = 1$ จะได้ว่าฟังก์ชันเชิงหลายเส้นคือฟังก์ชันเชิงเส้น และในกรณีที่ $m = 2$ จะเรียกฟังก์ชันเชิงหลายเส้นอันดับ 2 ว่าเป็น **ฟังก์ชันเชิงเส้นคู่** (Bilinear map) แม้ว่าการแปลงเชิงเส้น และ ฟังก์ชันเชิงหลายเส้นจะมีบทนิยามที่คล้ายกัน แต่เมื่อ $m \geq 2$ ฟังก์ชันทั้งสองประเภทนี้มีความแตกต่างกันอย่างมาก อย่างเช่น โดยบทนิยามของฟังก์ชัน

เชิงเส้นคู่ $\psi : V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ สำหรับ $v_1, v_1' \in V_1$ และ $v_2, v_2' \in V_2$ จะมีว่า $\psi(v_1, 0) = \psi(0, v_2) = 0$ เสมอ และ

$$\psi(v_1 + v_1', v_2 + v_2') = \psi(v_1, v_2) + \psi(v_1, v_2') + \psi(v_1', v_2) + \psi(v_1', v_2')$$

แต่สำหรับการแปลงเชิงเส้น $T : V_1 \times V_2 \longrightarrow W$ นั้น $T(v_1, 0)$ หรือ $T(0, v_2)$ ไม่จำเป็นต้องเป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ

$$T(v_1 + v_1', v_2 + v_2') = T(v_1, 0) + T(0, v_2) + T(v_1', 0) + T(0, v_2')$$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $V_1, \ldots, V_m, W$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนาม $\mathbb{F}$ เดียวกัน และ V^* หมายถึงปริภูมิคู่กันของ V ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเชิงหลายเส้น (ข้อกำหนดในแต่ละฟังก์ชันใช้กับทุกตัวแปรในโดเมน)

1. $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ที่กำหนดให้โดย $f(x, y) := xy$
2. $\phi_A : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ที่กำหนดให้โดย $\phi_A(x, y) := x^T A y$ เมื่อ $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$
3. $\otimes : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{C})$ ที่กำหนดให้โดย $\otimes(x, y) := xy^T$
4. $\det : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ที่กำหนดให้โดย $\det(x_1, \ldots, x_n) := \det(A)$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ โดยมีหลักที่ i เป็น x_i นั่นคือ $A := [x_1, \ldots, x_n] \in M_n(\mathbb{C})$
5. $\varphi : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ ที่กำหนดให้โดย $\varphi(f, v) := f(v)$
6. $\prod_{i=1}^m f_i : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow \mathbb{F}$ ที่กำหนดให้โดย $(\prod_{i=1}^m f_i)(v_1, \ldots, v_m) := \prod_{i=1}^m f_i(v_i)$ เมื่อ $f_i \in V_i^*$ สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, m$
7. $\vec{v} : V_1^* \times \cdots \times V_m^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ที่กำหนดให้โดย $\vec{v}(f_1, \ldots, f_m) := \prod_{i=1}^m f_i(v_i)$ เมื่อ $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ โดยที่ $v_i \in V_i$ สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, m$

เมื่อกำหนดให้ $M(V_1, \ldots, V_m; W)$ แทนเซตของฟังก์ชันเชิงหลายเส้นทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่มีโดเมนเป็น $V_1 \times \cdots \times V_m$ และโคโดเมนเป็น W จะได้จากบทนิยามโดยตรงเช่นกันว่า สำหรับ $a, b \in \mathbb{F}$ และ $\psi, \phi \in M(V_1, \ldots, V_m; W)$ ฟังก์ชัน $a\psi + b\phi \in M(V_1, \ldots, V_m; W)$ นั่นคือ $M(V_1, \ldots, V_m; W)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือสนาม $\mathbb{F}$ ปริภูมิหนึ่ง

ในกรณีที่ปริภูมิเวกเตอร์ $V_1, \ldots, V_m$ มีฐานเป็น $E_i := \{e_{i1}, \ldots, e_{in_i}\}$ และเมื่อให้

บทที่ 3

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

ในบทนี้จะเป็นการให้บทนิยาม และสมบัติพื้นฐานที่สำคัญสำหรับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป เนื่องจากฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันที่มีการขยายบทนิยามมาจากฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ ดังนั้นจึงได้มีการศึกษาสมบัติที่เทียบเคียงของทั้งสองฟังก์ชัน รวมถึงการขยายแนวคิดของพหุนามลักษณะเฉพาะไปสู่พหุนามลักษณะเฉพาะวางนัยทั่วไปที่สัมพัทธ์กับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปไว้เช่นกัน โดยการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ในบทนี้จะใช้พื้นฐานทางพีชคณิต พีชคณิตเชิงเส้น และทฤษฎีตัวแทนของกรุปจำกัดเป็นหลัก ซึ่งสมบัติที่ใช้แนวคิดทางพีชคณิตเชิงหลายเส้นจะถูกศึกษาผ่านทางคลาสเทนเซอร์สมมาตรซึ่งจะได้ศึกษาในบทต่อไป

3.1 บทนิยามและสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปเป็นฟังก์ชันที่ถูกนิยามขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย (แต่ใช้ชีวิตช่วงทำงานส่วนใหญ่อยู่ที่เยอรมนี) นามว่า อิสไซ ชูร์ (Issai Schur: 1875–1941) ได้นิยามขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาทฤษฎีตัวแทนของกรุปไว้ในวารสาร “I. Schur. (1918). Uber endliche Gruppen and Hermtesche Formen, *Math.Z.* 1, 184–207.” กล่าวคือ

บทนิยาม 17. กำหนดให้ G เป็นกรุปจำกัดซึ่งเป็นกรุปย่อยของกรุปสมมาตร S_n และ χ เป็นคาแรกเตอร์ของกรุป G **ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่สัมพัทธ์กับ G และ χ (Generalized matrix functions associated to G and χ)** คือฟังก์ชัน $d_\chi^G : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ซึ่ง

$$d_\chi^G(A) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)},$$

สำหรับแต่ละเมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ ในกรณีที่ $G = S_n$ จะเขียนแทนฟังก์ชัน d_χ^G ด้วย d_χ ซึ่งเรียกว่าเป็นฟังก์ชัน**อิมมาแนนต์ (Immanant)**

ตัวอย่างที่สำคัญของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปคือฟังก์ชัน**ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)** ซึ่งเป็นอิมมาแนนต์โดยมีคาแรกเตอร์เป็น $\epsilon = \mathrm{sgn} = [1^n] \vdash n$ นั่นคือ

$$d_\chi^G(A) = d_\epsilon^{S_n}(A) = d_{[1^n]}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \det(A)$$

ในกรณีที่กรุป $G = S_n$ และคาแรกเตอร์ $\chi = 1 = [n] \vdash n$ จะได้ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปเป็นฟังก์ชัน**เพอมาเนนต์** (Permanent)

$$d_\chi^G(A) = d_1^{S_n}(A) = d_{[n]}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} = \mathrm{per}(A)$$

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่สัมพัทธ์กับกรุปชัดแจ้ง $G = \{e\} \leq S_n$ และคาแรกเตอร์ $\chi = 1$ คือฟังก์ชัน**ผลคูณแนวทแยงมุม** (Diagonal product) **หรือฟังก์ชันอาดามาร์** (Hadamard function)

$$d_\chi^G(A) = d_1^{\{e\}}(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii} := h(A)$$

นอกจากนี้ คาแรกเตอร์ χ ของกรุป $G \leq S_n$ ในบทนิยามของเมทริกซ์วางนัยทั่วไปสามารถขยายไปสู่ฟังก์ชัน $c : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ใด ๆ ได้ และจะเรียกฟังก์ชันเมทริกซ์ $d_c^G : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ที่ซึ่ง

$$d_c^G(A) := \sum_{\sigma \in G} c(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)},$$

สำหรับแต่ละ $A \in M_n(\mathbb{C})$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่สัมพัทธ์กับ G และ c** (Generalized matrix function associated to G and c)

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป d_c^G ที่สัมพัทธ์กับ G และฟังก์ชัน $c : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ในฐานะที่เป็นฟังก์ชัน $d_c^G : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ โดยที่ $d_c^G(x_1, \ldots, x_n) := d_\chi^G(X)$ เมื่อ $X = [x_1 \cdots x_n]$ เป็นเมทริกซ์ที่มีหลักที่ i เป็นเวกเตอร์ $x_i := (x_{1i}, \ldots, x_{ni})^T \in \mathbb{C}^n$ สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, n$ จะพบว่า

$$\begin{aligned}
d_c^G(x_1, \ldots, a_k x_k + b_k y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) &= \sum_{\sigma \in G} c(\sigma) (\prod_{i \in [n]; \sigma(i) \neq k} X_{i\sigma(i)})(a_k x_{\sigma^{-1}(k)k} + b_k y_{\sigma^{-1}(k)k}) \\
&= a_k \sum_{\sigma \in G} c(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{i\sigma(i)} + b_k \sum_{\sigma \in G} c(\sigma) \prod_{i=1}^{n} Y_{i\sigma(i)}^k \\
&= a_k d_c^G(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\
&+ b_k d_c^G(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

บทที่ 4

คลาสเทนเซอร์สมมาตร

คลาสเทนเซอร์สมมาตรเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิผลคูณเทนเซอร์ซึ่งเป็นภาพของตัวดำเนินการสมมาตรที่สัมพัทธ์กับกรุปจำกัดและคาแรกเตอร์ของกรุปจำกัดบนปริภูมิผลคูณเทนเซอร์นั้น ในบทนี้จะศึกษาฐานอันดับเชิงตั้งฉากปรกติของคลาสเทนเซอร์สมมาตร สมบัติพื้นฐาน รวมถึงศึกษาการเหนี่ยวนำของตัวดำเนินการเชิงเส้นบนคลาสเทนเซอร์สมมาตรอันเป็นสมบัติสำคัญในการค้นหาคุณสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

4.1 ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน

ให้ V เป็นปริภูมิผลคูณภายในที่มีมิติเป็น n และให้ m เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\sigma \in S_m$ จะมีตัวดำเนินการเชิงหลายเส้น $\varphi_\sigma : \times^m V \longrightarrow \otimes^m V$ ที่ซึ่ง $\varphi_\sigma(v_1, \ldots, v_m) := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$ สำหรับแต่ละ $v_1, \ldots, v_m \in V$ ดังนั้น โดยสมบัติการแยกตัวประกอบสากลหนึ่งเดียวของปริภูมิผลคูณเทนเซอร์ ยืนยันได้ว่าจะมีตัวดำเนินการเชิงเส้น $P_\sigma \in \mathrm{End}(\otimes^m V)$ ที่ซึ่ง $P_\sigma \circ \otimes = \varphi_\sigma$ นั่นคือ

$$P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)} \tag{4.1.1}$$

สำหรับแต่ละ $v_1, \ldots, v_m \in V$ และจะเรียกตัวดำเนินการเชิงเส้น P_σ นี้ว่าเป็น **ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยนที่สัมพัทธ์กับ σ บน $\otimes^m V$** (Permutation operator)

ในกรณีที่ $\sigma = e \in S_m$ โดย (4.1.1) จะได้ว่า $P_e = I_{\otimes^m V}$ และสำหรับแต่ละ σ และ τ ใน S_m การคอมโพสิทกันของตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน P_σ และ P_τ สามารถคำนวณได้จาก (4.1.1) โดยตรงเช่นกัน กล่าวคือ สำหรับแต่ละ $v_1, \ldots, v_m \in V$

$$P_\sigma \circ P_\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = P_\sigma(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(m)}) = u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(m)}$$

เมื่อ $u_j := v_{\tau^{-1}(j)}$ สำหรับแต่ละ $j = 1, \ldots, m$ ซึ่งถ้า $u_{\sigma^{-1}(l)} = u_j$ นั่นคือ $j = \sigma^{-1}(l)$ จะได้

$$u_{\sigma^{-1}(l)} = u_j = v_{\tau^{-1}(j)} = v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(l))} = v_{(\sigma\tau)^{-1}(l)} \text{ สำหรับแต่ละ } l = 1, 2, ..., m$$

แทนในสมการข้างต้นจะได้

$$P_\sigma \circ P_\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_{(\sigma\tau)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{(\sigma\tau)^{-1}(m)} = P_{\sigma\tau}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)$$

ดังนั้น $P_\sigma \circ P_\tau = P_{\sigma\tau}$ สำหรับทุก ๆ $\sigma, \tau \in S_m$ นอกจากนี้

$$I_{\otimes^m V} = P_e = P_{\sigma\sigma^{-1}} = P_\sigma \circ P_{\sigma^{-1}}$$

นั่นคือ $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1}$ สำหรับแต่ละ $\sigma \in S_m$

ในกรณีที่ฐานอันดับฐานหนึ่งของปริภูมิเวกเตอร์ V เป็น $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ จะได้ (โดย (2.2.1)) ว่าฐานอันดับ (เรียงอันดับแบบดิกชันนารี) ฐานหนึ่งของ $\otimes^m V$ คือ $E_\otimes := \{e_\gamma^\otimes \mid \gamma \in \Gamma_{m,n}\}$ เมื่อ $e_\gamma^\otimes := e_{\gamma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\gamma(m)}$ และ

$$\Gamma_{m,n} := \{\gamma := (\gamma(1), \ldots, \gamma(m)) \in \mathbb{N}^m \mid 1 \le \gamma(i) \le n, i = 1, \ldots, m\}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า สำหรับแต่ละ $e_\beta^\otimes \in E_\otimes$

$$P_\sigma(e_\beta^\otimes) = P_\sigma(e_{\beta(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\beta(m)}) = e_{\beta(\sigma^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes e_{\beta(\sigma^{-1}(m))} = e_{\beta\sigma^{-1}}^\otimes = \sum_{\alpha \in \Gamma_{m,n}} \delta_{\alpha,\beta\sigma^{-1}} e_\alpha^\otimes$$

ดังนั้น เมทริกซ์การแปลงของตัวดำเนินการ P_σ เทียบกับฐานอันดับ $E_\otimes$ จะมีสมาชิกในตำแหน่งที่ (α, β) เป็น $\delta_{\alpha,\beta\sigma^{-1}}$ สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \Gamma_{m,n}$ เพราะฉะนั้น

$$\operatorname{tr}(P_\sigma) = \sum_{\alpha \in \Gamma_{m,n}} \delta_{\alpha,\alpha\sigma^{-1}} = |\{\alpha \in \Gamma_{m,n} \mid \alpha\sigma = \alpha\}|$$

ซึ่งถ้า $\sigma \in S_m$ เขียนในรูปผลคูณของวัฏจักรที่แตกต่างกันโดยที่ความยาวของแต่ละวัฏจักรมากกว่า 1 ได้จำนวน $c(\sigma)$ วัฏจักร จะทำให้ $\alpha\sigma := (\alpha(\sigma(1)), \ldots, \alpha(\sigma(m)))$ แบ่งการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิก $\alpha(\sigma(i))$ ทั้งหลายออกเป็น $c(\sigma)$ กลุ่ม หากต้องการให้ $\alpha\sigma = \alpha$ การเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกในแต่ละกลุ่มจะต้องไม่เปลี่ยนแปลงนั่นคือ สมาชิกของแต่ละกลุ่มจะต้องมีค่าเดียวกันซึ่งเลือกได้ทั้งหมด n ค่าจาก $1, 2, \ldots, n$ ดังนั้น

$$\operatorname{tr}(P_\sigma) = n^{c(\sigma)}$$

บทที่ 5

ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป และคลาสเทนเซอร์สมมาตร

ในบทที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปมีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดกับผลคูณภายในของเทนเซอร์สมมาตร ในบทนี้จะเชื่อมโยงความสัมพันธ์ดังกล่าวให้เด่นชัด และจะใช้ความสัมพันธ์ที่ได้ ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป ดังเช่นอสมการของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน สูตรวางนัยทั่วไปของโคชี–ไบเนต รวมถึงการประยุกต์ใช้สมบัติของปริภูมิกราสส์มันน์ และปริภูมิสมมาตรบริบูรณ์ซึ่งเป็นคลาสเทนเซอร์สมมาตรประเภทหนึ่ง ในการศึกษาคุณสมบัติวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ และฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์ อันรวมถึงการพิสูจน์สูตรการกระจายของลาปลาซของทั้งสองฟังก์ชัน

5.1 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปและคลาสเทนเซอร์สมมาตร

ให้ G เป็นกรุปย่อยของกรุป S_m และ χ เป็นคาแรกเตอร์ที่ลดทอนไม่ได้ของกรุป G ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่สัมพัทธ์กับ G และ χ ของเมทริกซ์ $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{C})$ จะเขียนได้ในรูป

$$d_\chi^G(A) = \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)}$$

และสำหรับชุดของเวกเตอร์ $u_1, \ldots, u_m$ และ $v_1, \ldots, v_m$ ในปริภูมิผลคูณภายใน V โดยทฤษฎีบท 43 พบว่าผลคูณภายในของเทนเซอร์สมมาตรแยกได้ $u^* := u_1 * \cdots * u_m$ และ $v^* := v_1 * \cdots * v_m$

บนคลาสสมมาตร $V_\chi^m(G)$ จะคำนวณได้จาก

$$\langle u^*, v^* \rangle = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{m} (u_i, v_{\sigma(i)})$$

ดังนั้นถ้าเมทริกซ์ A มีสมาชิกในตำแหน่ง $a_{ij} = (u_i, v_j)$ จะได้ว่า $a_{i\sigma(i)} = (u_i, v_{\sigma(i)})$ สำหรับแต่ละ $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ และ $\sigma \in G$ เพราะฉะนั้น

$$\langle u^*, v^* \rangle = \frac{\chi(e)}{|G|} d_\chi^G(A) \tag{5.1.1}$$

โดยสมบัติของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (1.2.5) พบว่า ถ้า $A \succeq 0$ แล้ว จะมีเวกเตอร์หลัก $v_1, \ldots, v_m$ ในปริภูมิผลคูณภายใน $\mathbb{C}^m$ ที่ใช้ผลคูณภายในมาตรฐาน ที่ทำให้ $A_{ij} = (v_i, v_j)$ สำหรับแต่ละ $i, j \in [m]$ ดังนั้นจึงได้โดย (5.1.1) ว่า

$$\|v^*\|^2 = \|v_1 * \cdots * v_m\|^2 = \frac{\chi(e)}{|G|} d_\chi^G(A) \tag{5.1.2}$$

นอกจากนี้ในกรณีที่ $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ เป็นฐานอันดับเชิงตั้งฉากปรกติของ V และ $K(T)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นบน $V_\chi^m(G)$ ที่เหนี่ยวนำจากตัวดำเนินการเชิงเส้น $T \in \mathrm{End}(V)$ ถ้าเมทริกซ์การแปลงของ T เทียบกับฐาน E อยู่ในรูป $A := [T]_E = (a_{ij})$ แล้วจะได้โดยทฤษฎีบท 55 ว่า สำหรับแต่ละ $\alpha, \beta \in \Gamma_{m,n}$

$$\langle K(T)e_\beta^*, e_\alpha^* \rangle = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{t=1}^{m} a_{\alpha\sigma(t)\beta(t)}$$

เมื่อให้ $\sigma(t) = i$ จะได้ $t = \sigma^{-1}(i)$ ซึ่งเมื่อ t แปรค่าตั้งแต่ $1, \ldots, m$ จะได้ว่า i แปรค่าตั้งแต่ $1, \ldots, m$ ด้วย และเมื่อให้ $\pi = \sigma^{-1}$ จะได้ว่า π แปรค่าทั่ว G และ $\chi(\sigma) = \chi(\pi^{-1}) = \overline{\chi(\pi)} = \bar{\chi}(\pi)$ ดังนั้น

$$\langle K(T)e_\beta^*, e_\alpha^* \rangle = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\pi \in G} \overline{\chi(\pi)} \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\beta(\pi(i))}$$

เมื่อให้ $A[\alpha|\beta] := (a_{\alpha(i)\beta(j)}) \in M_m(\mathbb{C})$ จะได้โดยบทนิยามของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปที่สัมพัทธ์กับ G และ $\bar{\chi}$ ว่า

$$d_{\bar{\chi}}^G(A[\alpha|\beta]) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\pi \in G} \overline{\chi(\pi)} \prod_{i=1}^{m} a_{\alpha(i)\beta(\pi(i))}$$

แต่โดยสมบัติ 18 ข้อ 4 พบว่า $d_{\bar{\chi}}^G(A) = d_\chi^G(A^T)$ สำหรับทุก ๆ เมทริกซ์ $A \in M_m(\mathbb{C})$ ดังนั้น จึงสรุปได้

บทที่ 6

การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป

ในบทที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าเมทริกซ์วางนัยทั่วไปมีบทประยุกต์โดยตรงในทางทฤษฎีเมทริกซ์ทั้งนี้เพราะว่าฟังก์ชันพื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์ที่สำคัญอย่างฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ และ ฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์เป็นฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปประเภทหนึ่ง ดังนั้น สมบัติต่าง ๆ ที่เป็นจริงสำหรับฟังก์ชันวางนัยทั่วไป ย่อมเป็นจริงสำหรับฟังก์ชันพื้นฐานเหล่านั้นด้วย ในบทนี้ จะเป็นการศึกษาการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปกับคลาสเทนเซอร์สมมาตร ทฤษฎีการไม่แปรผัน และทฤษฎีกราฟ

6.1 การประยุกต์ใช้กับคลาสเทนเซอร์สมมาตร

จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าสมบัติของคลาสเทนเซอร์สมมาตรก่อให้เกิดสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป ในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษาในแนวทางย้อนกลับ นั่นคือ การใช้เมทริกซ์วางนัยทั่วไปเพื่อศึกษาคลาสเทนเซอร์สมมาตร

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มี $\dim(V) = n$ และ χ เป็นคาแรกเตอร์ที่ลดทอนไม่ได้ของกรุป G ซึ่งเป็นกรุปย่อยของ S_m ให้ $u_1, \ldots, u_m \in V$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ พิจารณา $u^* := u_1 * \cdots * u_m$ ซึ่งเป็นสมาชิกในคลาสเทนเซอร์สมมาตร $V_\chi^m(G) \leq \otimes^m V$ จะพบว่า u^* สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันใน $\otimes^m V$ โดยมีสัมประสิทธิ์ของการเขียนดังกล่าวอยู่ในรูปฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปของเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับ $u_1, \ldots, u_m$ ได้ดังนี้

สมบัติ 87. ให้ $u^* := u_1 * \cdots * u_m \in V_\chi^m(G)$ โดยที่ $u_1, \ldots, u_m \in V$ ดังนั้นจะมี $r \in \mathbb{N}$ และลำดับเพิ่ม $\alpha \in Q_{r,m}$ ที่ทำให้ $B_{u^*} = \{u_{\alpha(k)} \mid k = 1, \ldots, r\}$ เป็นฐานอันดับของ $U := \operatorname{Span}(\{u_1, \ldots, u_m\})$ นั่นคือ $r = \dim(U)$ และถ้า $u_i := \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_{\alpha(j)}$ สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, m$ แล้ว

$$u^* = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\gamma \in \Gamma_{m,r}} d_\chi^G(A[(1, \ldots, m)|\gamma]) u_{\alpha\gamma}^{\otimes},$$

เมื่อ $A = (a_{ij}) \in M_{m\times r}(\mathbb{C})$ และ $A[(1,\ldots,m)|\gamma] \in M_m(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่สร้างจาก A โดยใช้แถวที่ $1,\ldots,m$ และหลักที่ $\gamma(1),\ldots,\gamma(m)$ ของเมทริกซ์ A

การพิสูจน์ โดยการแทนค่า $u_i := \sum_{j=1}^r a_{ij}u_{\alpha(j)}$ สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,m$ ใน u^* และใช้สมบัติการกระจายของ $*$ จะคำนวณได้ว่า

$$\begin{aligned} u^* &= (\sum_{j=1}^r a_{1j}u_{\alpha(j)}) * (\sum_{j=1}^r a_{2j}u_{\alpha(j)}) * \cdots * \sum_{j=1}^r a_{mj}u_{\alpha(j)} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_{m,r}} (\prod_{i=1}^m a_{i\gamma(i)}) u_{\alpha\gamma(1)} * u_{\alpha\gamma(2)} * \cdots * u_{\alpha\gamma(m)} \end{aligned}$$

โดยบทนิยามของ $u^*_{\alpha\gamma} := T(G,\chi)(u^{\otimes}_{\alpha\gamma})$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\gamma\in\Gamma_{m,r}} (\prod_{i=1}^m a_{i\gamma(i)}) \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1}) u_{\alpha\gamma\sigma(1)} \otimes u_{\alpha\gamma\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\alpha\gamma\sigma(m)} \\ &= \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\gamma\in\Gamma_{m,r}} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1}) (\prod_{i=1}^m a_{i\gamma(\sigma^{-1}(i))}) u_{\alpha\gamma(1)} \otimes u_{\alpha\gamma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\alpha\gamma(m)} \\ &= \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\gamma\in\Gamma_{m,r}} d^G_\chi(A[(1,\ldots,m)|\gamma]) u^{\otimes}_{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

□

โดยทฤษฎีบท 42 ยืนยันว่า สำหรับสมาชิก $u^* := u_1 * \cdots * u_m$ และ $w^* := w_1 * \cdots * w_m$ ใน $V^m_\chi(G)$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $u^* = w^* \neq 0$ แล้ว $\mathrm{Span}(\{u_1,\ldots,u_m\}) = \mathrm{Span}(\{w_1,\ldots,w_m\})$ ใน V ดังนั้น ในกรณีที่ทั้ง u^* และ v^* ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้ามี $w_i \notin U := \mathrm{Span}(\{u_1,\ldots,u_m\})$ แล้ว $u^* \neq w^*$ เพราะฉะนั้น การเปรียบเทียบการเท่ากันของสองสมาชิก $u^*, w^* \in V^m_\chi(G)$ จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $w_1,\ldots,w_m \in \mathrm{Span}(\{u_1,\ldots,u_m\})$ ซึ่งเมื่อเขียน $w_i := \sum_{j=1}^r b_{ij}u_{\alpha(j)}$ สำหรับแต่ละ $i = 1,\ldots,m$ จะได้ข้อสรุปเช่นเดียวกับสมบัติข้างต้นว่า

$$w^* = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\gamma\in\Gamma_{m,r}} d^G_\chi(B[(1,\ldots,m)|\gamma]) u^{\otimes}_{\alpha\gamma},$$

เมื่อ $B = (b_{ij}) \in M_{m\times r}(\mathbb{C})$ นอกจากนี้เนื่องจาก $B_{u^*} = \{u_{\alpha(k)} \mid k = 1,\ldots,r\}$ เป็นฐานอันดับของ $U := \mathrm{Span}(\{u_1,\ldots,u_m\})$ จึงได้ว่า

$$B^{\otimes}_{u^*} = \{u^{\otimes}_{\alpha\gamma} \mid \gamma \in \Gamma_{m,r}\}$$

บทที่ 7

หัวข้องานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะเป็นการศึกษาหัวข้องานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป โดยเฉพาะอย่างยิ่งเป็นการศึกษาข้อความคาดการณ์การครอบงำของฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์ซึ่งเป็นข้อคาดการณ์ที่มีมานานกว่าห้าทศวรรษและยังคงเป็นปัญหาเปิดอยู่จนถึงปัจจุบัน อีกทั้งศึกษาปัญหาตัวคงสภาพเชิงเส้นของฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไปในหลากหลายมุมมอง โดยเป็นการนำเสนอ ปัญหา คำถาม และตัวอย่างงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแต่ละหัวข้อ

7.1 ข้อความคาดการณ์การครอบงำของฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์

ในปีคริสต์ศักราช 1893 ชาก ซาโลมง อาดามาร์ (Jacques Salomon Hadamard) ได้ตีพิมพ์อสมการอันมีชื่อเสียงที่เกี่ยวกับฟังก์ชันดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนที่เรียกว่า **อสมการอาดามาร์ (Hadamard inequality)** ไว้ใน [12] กล่าวคือ

$$h(A) := \prod_{i=1}^{n} A_{ii} \geq \det(A)$$

สำหรับเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน $A \in M_n(\mathbb{C})$ ใด ๆ และในกรณีที่ A เป็นเมทริกซ์บล็อก

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \tag{7.1.1}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนโดยที่ X, W เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้โดยสมบัติของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนว่า ทั้ง X, W จะเป็นเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนด้วย และโดยอสมการอาดามาร์จึงได้ว่า $h(X) \geq \det(X)$ และ $h(W) \geq \det(W)$ และดังนั้น

$$h(A) = h(X)h(W) \geq \det(X)\det(W)$$

สำหรับเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน $A \in M_n(\mathbb{C})$ ใด ๆ และในปีคริสต์ศักราช 1907 แอนสท์ ซีกิสมุนด์ ฟิสเชอร์ (Ernst Sigismund Fischer) ได้ขยายข้อสรุปของอสมการอาดามาร์ไว้เป็น**อสมการของฟิสเชอร์ (Fischer's Inequality)** (ดังทฤษฎีบท 61)

$$\det(X)\det(W) \geq \det(A)$$

ไว้ใน [8] ต่อมาในปีคริสต์ศักราช 1918 อิสไซ ชูร์ ได้ขยายอสมการของทั้งอาดามาร์ และ ฟิสเชอร์สู่ข้อสรุปสำหรับฟังก์ชันเมทริกซ์วางนัยทั่วไป d_χ^G เมื่อ $G \leq S_n$ และ χ เป็นคาแรกเตอร์ที่ลดทอนไม่ได้ของกรุป G ไว้เป็น**อสมการของชูร์ (Schur's Inequality)** (ดังทฤษฎีบท 60)

$$\frac{1}{\chi(e)} d_\chi^G(A) \geq \det(A)$$

สำหรับเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน $A \in M_n(\mathbb{C})$ ใด ๆ ไว้ใน [43]

ในลักษณะเดียวกับอสมการของอาดามาร์ ในปีคริสต์ศักราช 1963 มาร์วิน มาร์คัส (Marvin Marcus) ได้ตีพิมพ์**อสมการของมาร์คัส (Marcus's Inequality)**

$$\operatorname{per}(A) \geq h(A)$$

สำหรับทุก ๆ เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน $A \in M_n(\mathbb{C})$ ไว้ใน [20] และในปีคริสต์ศักราช 1965 มาร์คัส และมินซ์ (Henryk Minc) ได้ตั้งคำถามเกี่ยวกับฟังก์ชันเพอร์มาเนนต์ของเมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอนไว้ใน [24] ความว่า

คำถาม 101. *ให้ G เป็นกรุปย่อยของกรุปสมมาตร S_n และ χ เป็นคาแรกเตอร์เชิงเส้นของกรุป G ภายใต้เงื่อนไขใดของ χ และ G ที่ทำให้อสมการ*

$$\sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \leq \operatorname{per}(A)$$

เป็นจริงสำหรับทุก ๆ เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน $A \in M_n(\mathbb{C})$?

ปีถัดมา เอลเลียตต์ เฮอร์เชล เลียบ (Elliott Hershel Lieb) ได้พิสูจน์**อสมการของเลียบ (Lieb's Inequality)** ซึ่งคล้ายกับอสมการของฟิสเชอร์ไว้ใน [19] กล่าวคือ

หนังสือแนะนำ

280 บาท

สถิติประยุกต์สำหรับงานวิจัยด้านสาธารณสุข

ผู้แต่ง: รศ. ดร.ปัทมา สุพรรณกุล

สถิติเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการวิจัย ในการพิจารณาเลือกเครื่องมือทางสถิติสำหรับการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อตอบวัตถุประสงค์งานวิจัยนั้น ผู้วิจัยต้องมีความรอบรู้เกี่ยวกับหลักการเลือกใช้สถิติ ข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติตลอดจนประเภทของมาตรวัดตัวแปรที่ศึกษา จะเห็นว่าข้อมูลเปรียบเสมือนวัตถุดิบในการผลิตงานวิจัย หากผู้วิจัยเข้าใจลักษณะวัตถุดิบก็จะสามารถเลือกใช้สถิติได้อย่างเหมาะสม ส่งผลให้ผลผลิตหรือผลงานวิจัยนั้นมีความถูกต้องและมีความน่าเชื่อถือ กระบวนการแปลงวัตถุดิบที่สำคัญคือความรอบรู้เกี่ยวกับเทคนิควิธีการจัดการข้อมูล และวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป

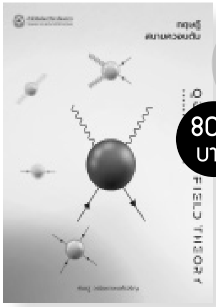
หนังสือนี้นำเสนอสถิติประยุกต์พร้อมทั้งภาพประกอบคำอธิบายในทุกขั้นตอนของการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ พร้อมวิธีการอ่านการแปลความหมาย ผลการวิเคราะห์ และวิธีการนำเสนอตารางผลการวิเคราะห์ข้อมูลไว้อย่างครบถ้วน

380 บาท

คณิตศาสตร์ประกันชีวิตเบื้องต้น

ผู้แต่ง: ผศ. ดร.ชัยรัตน์ มดนาค

คณิตศาสตร์และสถิติเป็นหัวใจหลักของอุตสาหกรรมประกันภัย การทำประกันเป็นข้อตกลงระหว่าง “ผู้เอาประกัน” กับ “ผู้ให้ประกัน” โดยมี “กรมธรรม์” เป็นพันธสัญญาที่ระบุว่าผู้เอาประกันต้องจ่ายเบี้ยประกันเท่าใด และจะได้รับผลประโยชน์ใดบ้าง ซึ่งรายละเอียดต่าง ๆ ที่ระบุจะไม่สามารถแก้ไขได้หลังจากเซ็นสัญญาร่วมกันแล้ว สิ่งสำคัญที่สุดในกรมธรรม์ คือ เบี้ยประกันเรียกเก็บและเงินผลประโยชน์ ซึ่งจะต้องมีการคำนวณ อย่างรอบคอบโดยใช้หลักสถิติและคณิตศาสตร์ที่สำคัญหนังสือเล่มนี้ รวบรวมหลักคณิตศาสตร์และสถิติพื้นฐานที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการต่อยอด องค์ความรู้ให้กับผู้อ่าน โดยหลักประกันภัยในการประกันชีวิตเพียงอย่างเดียว



800 บาท

ทฤษฎีสนามควอนตัม

Quantum Field Theory

ผู้แต่ง: ผศ. ดร.พิเชฐ วณิชชาพงศ์เจริญ

ทฤษฎีสนามควอนตัม คือ กรอบของทฤษฎีที่อธิบายสนามที่มีสมบัติทางควอนตัม โดยที่สนามคือฟังก์ชันของตำแหน่งในกาลอวกาศ หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่ออธิบายหลักการ แนวคิด และการคำนวณในทฤษฎีสนามควอนตัม โดยเน้นอภิปรายประเด็นของการนำทฤษฎีสนามควอนตัมไปอธิบายหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับฟิสิกส์อนุภาค โดยมีประเด็นหลัก ได้แก่ ความรู้เบื้องต้นที่เป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาทฤษฎีสนามควอนตัม การวิเคราะห์สนามอิสระ การวิเคราะห์ทฤษฎีสนามสเกลาร์ที่มีอันตรกิริยาในตัว การวิเคราะห์พลศาสตร์ไฟฟ้าเชิงควอนตัมรวมทั้งตัวอย่างทิศทางการพัฒนาของเนื้อหาที่นอกเหนือจากที่อภิปรายในส่วนหลัก หนังสือเล่มนี้เหมาะสำหรับผู้สอนระดับบัณฑิตศึกษา หรือการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เนื่องจากอธิบายแนวคิด การวิเคราะห์ และวิธีการคำนวณโดยละเอียด รวมทั้ง มีการวิจารณ์ประเด็นที่สำคัญและสรุปท้ายบท เพื่อให้ผู้อ่านตรวจสอบความเข้าใจ และทราบความเชื่อมโยงเบื้องต้นกับเนื้อหาอื่น นอกจากนี้ หนังสือเล่มนี้ยังมีโจทย์ปัญหาและเฉลย เพื่อให้ผู้อ่านได้เสริมความเข้าใจในเนื้อหา